MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة باجي مختار عنابة

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIORAT

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

Professeur TOUMI Salah

LES ANTENNES

CHAPITRE I : POTENTIEL VECTEUR, POTENTIEL SCALAIRE, CONDITION DE LORENTZ

I- Définition de $\vec{A}$ et V, Equation de propagation, Condition de Lorentz

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = - \delta \vec{B} / \delta t$ $\qquad$ $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{H} = \vec{J} + \delta \vec{D} / \delta t$

$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$ $\qquad$ $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

On pose : $\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ $\qquad$ $\{ \mathrm{div}\,(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = 0 \}$

On appelle $\vec{A}$: Potentiel vecteur

$\delta \vec{B} / \delta t = \delta\, \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A} / \delta t = \vec{\mathrm{rot}}\,(\delta \vec{A} / \delta t)$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} + \delta\vec{B} / \delta t = 0 \rightarrow \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} + \vec{\mathrm{rot}}\,(\delta\vec{A} / \delta t) = 0 \rightarrow \vec{\mathrm{rot}}(\vec{E} + \delta\vec{A} / \delta t) = 0$

On sait que : $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}) = \vec{0}$

$\underline{\vec{E} + \delta\vec{A} / \delta t = - \vec{\mathrm{grad}}\, V}$

On appelle V : Potentiel scalaire.

$\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \quad \rightarrow \quad \mu.\vec{H} : \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \quad \rightarrow \quad \vec{H} = 1/\mu\, .\, \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{H} = 1/\mu\, .\, \vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{\mathrm{rot}}\vec{A}) = 1/\mu\, .\, \{ \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A} \}$

$\qquad = \vec{J} + \delta\vec{D} / \delta t = \vec{J} + \varepsilon.\delta\vec{E} / \delta t$

$\vec{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu.\vec{J} + \varepsilon.\mu.\delta\vec{E} / \delta t$

$\vec{E} + \delta\vec{A} / \delta t = - \vec{\mathrm{grad}}\, V \quad \rightarrow \quad \delta\vec{E} / \delta t = - \vec{\mathrm{grad}}\, \delta V / \delta t - \delta^2 \vec{A} / \delta t^2$

$\vec{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A} - \mu.\vec{J} + \varepsilon.\mu\, \{ \vec{\mathrm{grad}}\, \delta V / \delta t + \delta^2 \vec{A} / \delta t^2 \} = 0$

$\vec{\mathrm{grad}}\{ \mathrm{div}\vec{A} + \varepsilon.\mu.\delta V / \delta t \} - \Delta\vec{A} - \mu.\vec{J} + \varepsilon.\mu.\delta^2 \vec{A} / \delta t^2 \} = 0$

Je peux alors poser : $\underline{\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{A} + \vec{\mathrm{grad}}\, f)}$ du moment que : $f = \mathrm{div}\,\vec{A} + \varepsilon.\mu.\delta V / \delta t = 0$

C'est la condition de Lorentz.

$\Delta\vec{A} + \mu.\vec{J} - \varepsilon.\mu.\delta^2 \vec{A} / \delta t^2 = 0$: est l'équation de propagation du vecteur potentiel $\vec{A}$.

$\vec{E}$, $\vec{H}$ et $\vec{A}$ se propagent suivant une loi identique.

La vitesse de propagation est $v_\varphi = 1/ \sqrt{\varepsilon.\mu}$

$\vec{E} = - \vec{grad}\, V - \delta\vec{A} / \delta t$

Nous avons : div $\vec{D} = \rho$ $\rightarrow$ div $\vec{E} = \rho / \varepsilon$

div $\vec{E} = -$ div ($\vec{grad}$ V) - div ($\delta\vec{A} / \delta t$)

$\rho / \varepsilon = - \Delta V -$ div ($\delta\vec{A} / \delta t$)

de la condition de Lorentz :

div $\vec{A} + \varepsilon.\mu.\delta V/ \delta t = 0$ $\rightarrow$ div ($\delta\vec{A} / \delta t$) $= - \varepsilon.\mu.\delta^2 V/ \delta t^2$

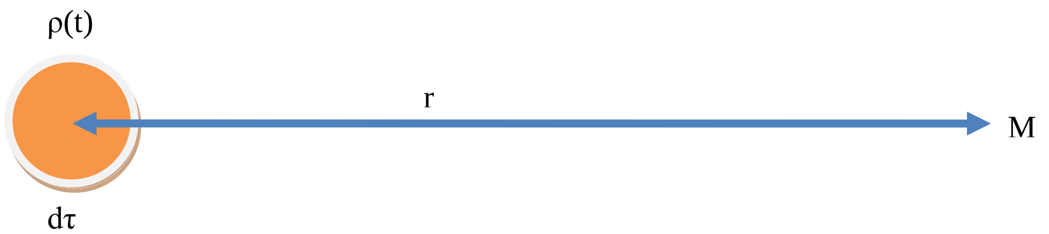
$\Delta V + \rho / \varepsilon - \varepsilon.\mu.\delta^2 V/ \delta t^2 = 0$: est l'équation de propagation du potentiel scalaire V.

La vitesse de propagation est $v_\varphi = 1/ \sqrt{\varepsilon.\mu}$ ou $c = 1/ \sqrt{\varepsilon_0.\mu_0}$ dans le cas du vide.

On vient de montrer qu'à chaque fois qu'on a un champs vecteur $\vec{E}$ et $\vec{H}$, alors il existe $\vec{A}$ et V $\rightarrow$ si on peut trouver $\vec{A}$ et V alors on peut connaître $\vec{E}$ et $\vec{H}$.

II- Les potentiels retardés

On va essayer de déterminer V dans le cas le plus général. On considère un volume dτ et on se place à une distance r, dans dτ, il existe une densité de charge ρ(t).



On appelle V, le potentiel créé par la charge ρ dans le volume dτ au point M.

$\Delta V - \varepsilon.\mu.\delta^2 V/ \delta t^2 + \rho(t) / \varepsilon = 0$

ΔV en coordonnées sphériques :

$\Delta V = 2/r \,.\, \delta V/ \delta r + \delta^2 V/ \delta r^2 = 1/r \,.\, \delta^2 (rV)/ \delta r^2$

$1/r \,.\, \delta^2 (rV)/ \delta r^2 - \varepsilon.\mu.\delta^2 V/ \delta t^2 + \rho(t) / \varepsilon = 0$

ρ(t) existe dans dτ $\rightarrow$ mais au point M, ρ(t) = 0

$1/r \,.\, \delta^2 (rV)/ \delta r^2 = 1/c^2.\delta^2 V/ \delta t^2$

r.V vérifie l'équation des cordes vibrantes.

$r.V = f(t - r/c) + g(t + r/c)$

L'onde réfléchie n'a aucune signification physique car on est dans le vide.

$r.V = f(t - r/c) \rightarrow V = 1/r \, . \, f(t - r/c)$.

La cause qui se produit en $d\tau$ a un effet retardé sur M.

En électrostatique : $Vs = \rho(t).\, d\tau / 4.\pi.\varepsilon.r$ (Poisson).

$\rho(t).\, d\tau / 4.\pi.\varepsilon.r = 1/r.\ f(t)$ ($r \rightarrow 0$).

$f(t) = \rho(t).\, d\tau / 4.\pi.\varepsilon$ toujours $r \rightarrow 0$.

$V = 1/r \, . \, \rho(t - r/c).\, d\tau / 4.\pi.\varepsilon$

$\rho(t - r/c)$ est la charge qui existait à l'instant antérieur au point 0.

Ce qui se passe en 0 est retardé par rapport à ce qui se passe en M.

$V = 1 / 4.\pi.\varepsilon \iiint \rho(t - r/c).\, d\tau / r$

V est un potentiel retardé $\rightarrow$ ce qui se passe en M est dû à ce qui se passe en 0 à l'instant t-r/c.

$\vec{A}$ et V n'ont pas de signification physique, ils représentent des artifices de calculs pour trouver $\vec{E}$ et $\vec{H}$.

$$V = 1 / 4.\pi.\varepsilon \iiint_{vol.} \rho(t - r/c).\, d\tau / r$$

Dans le cas où on a un domaine surfacique de charge σ :

$$V = 1 / 4.\pi.\varepsilon \iiint_{vol.} \rho(t - r/c).\, d\tau / r + 1 / 4.\pi.\varepsilon \iint_{surf.} \sigma(t - r/c).\, d\tau / r$$

$$\vec{A} = \mu / 4.\pi \iiint_{vol.} J(t - r/c).\, d\tau / r$$

$\iiint_{vol.}$ est l'intégrale triple sur le volume.

$\iint_{surf.}$ est l'intégrale double sur la surface.

Equations fondamentales de base de la théorie des antennes :

$$\vec{E} = -\,\vec{grad}\ V) - \delta\vec{A} / \delta t$$

$$\vec{H} = \vec{rot}\,\vec{A} / \mu$$

$$\Delta V - \varepsilon.\mu.\delta^2 V / \delta t^2 + \rho / \varepsilon = 0$$

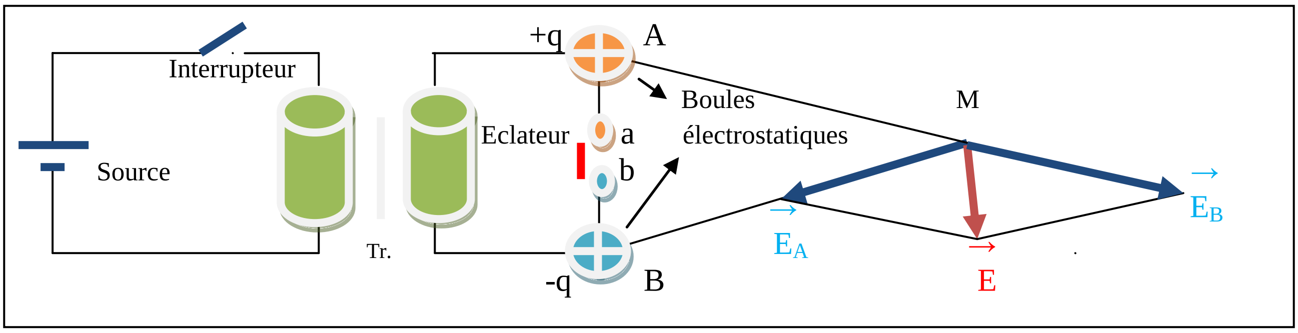
$$div\vec{A} + \varepsilon.\mu.\delta V / \delta t = 0$$

$$\Delta\vec{A} + \mu.\vec{J} - \varepsilon.\mu.\delta^2 \vec{A} / \delta t^2 = 0.$$

Chapitre II : Rayonnement du Doublet

I- Introduction

Hertz a fait l'expérience fondamentale (en 1888) suivante :



$\vec{E}_A$ est le champ créé par A au point M,

$\vec{E}_B$ est le champ créé par B au point M.

Si on charge (interrupteur fermé), puis on éclate (éclateur ab fermé) les boules A et B plusieurs fois, on aura un phénomène périodique qui se transforme en un phénomène sinusoïdal.

$q_A = Q.\ e^{j\omega t}$

$q_B = -\ Q.\ e^{j\omega t}$ avec $Q > 0$.

Au moment de la décharge, on a un courant : $i = I.\ e^{j\omega t}$

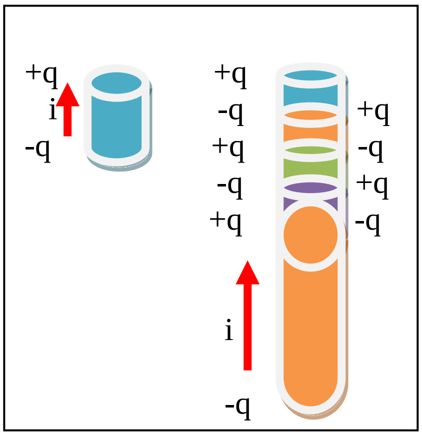
$i = dq\ /\ dt = j.\omega.q = j.\omega.Q.e^{j\omega t}$

$\mathbf{I = \omega.Q.e^{j\pi/2}}$

Ce courant I crée un champ B dû à l'ionisation de l'air. On a donc un rayonnement (le système rayonne). Donc en tout point de l'espace on a un champ $\vec{E}$ et un champ $\vec{H}$.

Ce doublet est le doublet de Hertz.

Doublet théorique : est un élément infiniment petit de longueur dl parcouru par un courant i.



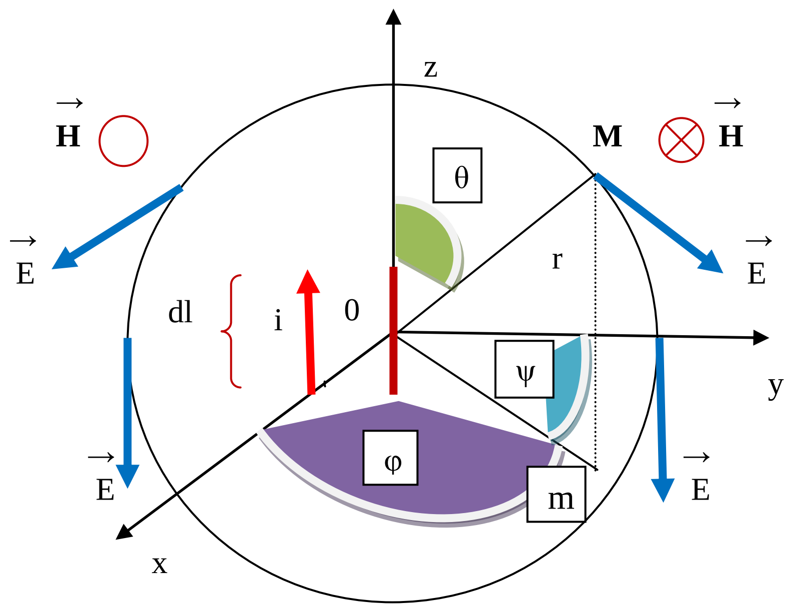
On peut prendre un élément beaucoup plus grand et le partager en petits éléments, les charges s'annulent deux à deux :

→ il en reste que celles des deux bouts.

II- Mise en équation, Pot V, $\vec{A}$ du doublet

II-1 Références

Soit un doublet électrique dans un repère :



II-2 Calcul de $\vec{A}$

$$\vec{A} = \mu / 4.\pi \,.\, \iiint_{vol.} \vec{i}\,(t\text{-}r/c)\,.\,d\tau / r$$

$\vec{A}$ est // $\vec{i}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} Ax = 0 \\ Ay = 0 \end{cases}$

Le volume se ramène à une longueur du moment que la section est infiniment petite.

$$\vec{A} = \mu\, \vec{i}\,(t - r/c)\,.\,dl / 4.\pi.r$$

$$\mathbf{\vec{A} = j\,.\,\omega.\,Q\,\mu\,e^{(j(\omega\,t - k.r)}\,.\,dl.\,\vec{e}_z\ /\ 4.\pi.r} \qquad \mathbf{k = \omega / c}$$

$$\mathbf{A_z = \mu.\,dl.\,I.e^{\,j(\omega\,t - k.r)}\ /\ 4.\pi.r}$$

II-3 Calcul de V

On utilise la méthode de : $\text{div}\vec{A} + \varepsilon.\mu.\delta V/\delta t = 0$

$\vec{A} \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 0 \\ Az \end{cases}$ on se ramène à $\vec{A} \begin{cases} A_r = A_z\,.\cos\theta \\ A_\theta = -A_z\,.\sin\theta \\ A_\varphi = 0 \end{cases}$

Il va falloir projeter $\vec{A}$ dans le repère ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$)

$$\text{div}\vec{A} = 2.A_r / r + \delta A_r / \delta r + 1/r\,.\,\delta A_\theta / \delta\theta + A_\theta / r.\text{tg}\theta + 1/r.\sin\theta\,.\,\delta A_\varphi / \delta\varphi$$

Or V est sinusoïdal $\rightarrow$ $V = V_0 . e^{j.\omega.t)}$

$\mathrm{div}\vec{A} + j.\omega.\varepsilon.\mu.V = 0 \quad \rightarrow \quad V = -\mathrm{div}\,\vec{A} / j.\omega.\varepsilon.\mu$

En calculant $\mathrm{div}\,\vec{A}$, on a :

$$V_0 = 1 / j.\omega.\varepsilon.\mu \left[j.k.\ K.\cos\theta / r + K.\cos\theta / r^2 \right] e^{-j.k.r}$$

$k = 2.\pi / \lambda$ et $K = \mu.dl.\ I / 4.\pi$

$$\mathbf{V = I.\ dl.\ \cos\theta / 4.\pi.\varepsilon.j.\omega \left[1/r^2 + j.k / r \right] e^{j(\omega t - k.r)}}$$

L'expression de V (potentiel scalaire) reste la même en coordonnées cylindriques et cartésiennes.

III- Calcul de $\vec{H}$ et $\vec{E}$

III-1 Calcul de $\vec{H}$

$\vec{H} = 1 / \mu\ .\ \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$

Avec $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ (en coordonnées sphériques), on trouve $\vec{H} \begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = 0 \\ H_\varphi = I\ dl\ \sin\theta / 4.\pi \left[1/r^2 + j\ k/r \right] e^{j(\omega t - kr)} \end{cases}$

Remarque :

Ni $\vec{A}$ ni $\vec{B}$ ($\vec{H}$) ne dépend de φ, $\vec{A}$ et $\vec{H}$ restent les mêmes quand on fait varier φ.

III-2 Calcul de $\vec{E}$

$\vec{E} = -\,\vec{\mathrm{grad}}\,V - \delta\vec{A} / \delta t \rightarrow \quad \vec{E} = -\,\vec{\mathrm{grad}}\,V - j.\omega\,\vec{A}$

En exprimant $\vec{\mathrm{grad}}\,V$ en coordonnées sphériques, alors on trouve :

$$\vec{E} \begin{cases} E_r = I.\ dl.\ \cos\theta / 2.\pi.\varepsilon.j.\omega.r^3 \left[1 + j\ 2.\pi.r/\lambda \right] .\ e^{j(\omega t - k.r)} \\ E_\theta = I.\ dl.\ \sin\theta / 4.\pi.\varepsilon.j.\omega.r^3 \left[1 + j\ 2\pi r/\lambda + 4.\pi^2.r^2/\lambda^2 \right] .\ e^{j(\omega t - k.r)} \\ E_\varphi = 0 \qquad \text{avec } k = 2.\pi / \lambda \end{cases}$$

Remarque :

$\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont $\perp$ puisque $\vec{E}$ est contenu dans le plan ($\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$).

IV- Intensité des champs au voisinage du doublet

Le voisinage du doublet veut dire que nous avons : $\vec{k}.\ \vec{r} \ll 1 \rightarrow r \ll \lambda / 2.\pi$

Les termes $1/r^2$ et $1/r^3$ sont prépondérants par rapport à $1/r$ d'où $1/r \ll 1/r^2$

$$\vec{E}\begin{cases} E_r = 2.Q.\,dl.\cos\theta / 4.\pi.\varepsilon.r^3 \,.\, e^{j(\omega t - k.r)} \\ E_\theta = Q.\,dl.\sin\theta / 4.\pi.\varepsilon.r^3 \,.\, e^{j(\omega t - k.r)} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

avec $k = 2.\pi / \lambda$ et $Q = I / j.\,\omega$

$$\vec{H}\begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = 0 \\ H_\varphi = I.dl.\sin\theta / 4.\pi.r^2 \,.\, e^{j(\omega t - kr)} \end{cases}$$

Remarque :

$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ est du style $|\vec{S}| = \sin(\omega.t - \vec{k}.\vec{r}).\cos(\omega.t - \vec{k}.\vec{r})$. Dans le temps $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont déphasés de $\pi/2$.

La valeur moyenne $<\vec{S}> = 0$. → On a n'a aucun rayonnement de la puissance active mais on a un rayonnement de la puissance réactive : on est dans la **zone de Fresnel.**

En moyenne quand on est près du doublet, la puissance active est nulle : → on a des **ondes sphériques.**

V- Intensité des champs loin du doublet

Loin du doublet veut dire que nous avons : $\vec{k}.\vec{r} >> 1 \rightarrow r >> \lambda / 2.\pi$

Les termes 1/r deviennent prépondérants.

$$\vec{E}\begin{cases} E_r = 0 \\ E_\theta = j.I.dl.\sin\theta / 2.\varepsilon.\lambda.r.c \,.\, e^{j(\omega t - k.r)} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

où **c** est la célérité de l'onde dans le milieu considéré.

$$\vec{H}\begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = 0 \\ H_\varphi = j.I.dl.\sin\theta / 2.\lambda.r \,.\, e^{j(\omega t - kr)} \end{cases}$$

Quand on est dans le vide, on aura :

$$\mathbf{|\vec{E}| = 60.\pi.I.dl.\sin\theta / \lambda.r}$$

Remarques :

1- La fonction $\mathbf{F(\theta) = \pi.dl.\sin\theta / \lambda}$ est appelée **fonction caractéristique du doublet**,

2- La puissance active **|** $\vec{\mathbf{E}}$ **|** n'est pas nulle au cours d'une période $\rightarrow$ on a de l'énergie active rayonnée dans la zone active appelée **zone de FRAUNHOFFER** (transfert de la puissance active).

On a une onde sphérique qui peut-être assimilée à la limite à une onde plane.

$\vec{k}$ est porté par $\vec{e_r}$ (sens de propagation)

$\vec{E}$ est porté par $\vec{e_\theta}$

$\vec{H}$ est porté par $\vec{e_\varphi}$

3- La phase est toujours constante sur la sphère de centre 0 et de rayon r. Les plans équiphases sont des sphères et plus on s'éloigne de la source et plus le plan tangent à la sphère se confond avec la surface de la sphère.

Pour φ = constante, r = constante et θ varie alors :

$\vec{E}$ et $\vec{H}$ varient en $\sin\theta$ et changent de sens quand θ devient supérieur à π ($\theta > \pi$).

$\vec{E}$ dépend de t, θ et r.