الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة باجي مختار –عنابة –

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير

سنة أولى ل.م.د

مقياس الرياضيات 2

الأستاذ بوغابه سمير

تابع للفصل 3: المصفوفات

5-مقلوب مصفوفة (المصفوفة العكسية)

A مصفوفة مربعة من M_n (K) نقول أن A تقبل مصفوفة عكسية ونرمز لها بالرمز: $B = A^{-1}$

بحيث: $A.B = B.A = I_n$

البحث عن A^{-1}

1- **det A = 0** فأن A^{-1} غير موجودة.

2- **det A ≠0** فأن A^{-1} موجودة معرفة بالعبارة : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^t$

حيث $B = (b_{ij})$; $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

مثال 1:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ فأن: detA = (2.6 -3.4) = 12-12 = 0 منه A^{-1} غير موجودة.

مثال 2:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ فأن: detA = 2.3 -1.4 = 6-4 = 2 منه A^{-1} موجود ة ومنه

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^t$ و $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$b_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11}$ = det(3)= 3

$b_{12} = (-1)^{1+2} \det A_{12}$ =- det(4)= -4

$b_{21} = (-1)^{2+1} \det A_{21}$ =- det(1)= -1

$b_{22} = (-1)^{2+2} \det A_{22}$ = det(2)= 2

$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ومنه: $B^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ اذن:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

مثال 3: $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det A=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det A= 5(9-16) - 7(6-12) +9(8-9) =-2$$

det A = -2 ≠ 0 منه A^{-1} موجودة و $A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^t$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{31} \end{pmatrix}$$

$$b_{11}= (-1)^{1+1} \det A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (9-16) = -7$$

$$b_{12}= (-1)^{1+2} \det A_{12} = -\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} =-(21-36) =15$$

$$b_{13}= (-1)^{1+3} \det A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = (28-27) = 1$$

$$b_{21}= (-1)^{2+1} \det A_{21} =- \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =-(6-12) = 6$$

$$b_{22}= (-1)^{2+2} \det A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = (15-27) = -12$$

$$b_{23}= (-1)^{2+3} \det A_{23} =- \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} =-(20-18) =- 2$$

$$b_{31}= (-1)^{3+1} \det A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (8-9) = -1$$

$$b_{32}= (-1)^{3+2} \det A_{32} =- \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} =-(20-21) =1$$

$$b_{33}= (-1)^{3+3} \det A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = (15-14) =1$$

ومنه: $B = \begin{pmatrix} -7 & 15 & 1 \\ 6 & -12 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B^t = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 15 & -12 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

اذن: $A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 15 & -12 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

6-القيم الذاتية والأشعة الذاتية:

تعريف:

E فضاء شعاعي على الحقل K

$f: E \longrightarrow E$

حيث A مصفوفة ملحقة ل f إذا تحقق ما يلي: $\det(A-\lambda I_n) = 0$

λ قيمة ذاتية من K و λI_n مصفوفة الوحدة

طريقة البحث عن القيم الذاتية:

1-نبحث عن المصفوفة $(A-\lambda I_n)$

2-نحسب $\det(A-\lambda I_n) = P(\lambda)$ حيث $P(\lambda)$ كثير حدود المطلوب وحلول المعادلة

$P(\lambda) = 0$ هي القيم الذاتية

مثال 1:

عين القيم الذاتية للمصفوفة A

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

الجواب :

$$A-\lambda I_3 = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)[(-2)+(-1-\lambda)(-\lambda)] + (-\lambda+2) - 2(1+1-\lambda)$$

$$=(-1-\lambda)[\lambda^2-\lambda-2] + (-\lambda+2) - 2(2-\lambda)$$

$$=(-1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda-2) + (\lambda-2)$$

$$=(-\lambda^2-2\lambda)(\lambda-2)$$

$$P(\lambda) = (-\lambda^2-2\lambda)(\lambda-2) = 0$$

$$(-\lambda^2-2\lambda)(\lambda-2) = 0$$

$$(-2-\lambda)(\lambda)(\lambda-2) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

الأشعة الذاتية

نقول عن الشعاع $\vec{X}$ من K^n انه شعاع ذاتيا والمرفق بالقيم الذاتية إذا وافقت إذا كان

$$\boxed{(A-\lambda I_n)\vec{X} = 0_E}$$

طريقة البحث عن الأشعة الذاتية:

1- نبحث عن القيم الذاتية λ للمصفوفة A

2- ثم نطبق العلاقة $(A-\lambda I_n)\vec{X} = 0_E$

3- نجد جملة خطية نقوم من خلالها في كل حالة تعويض القيم الذاتية λ فنجد في كل حالة الشعاع الذاتي الموافق للجملة الخطية.

مثال 1:

عين الأشعة الذاتية الموافقة للقيم الذاتية للمصفوفة A

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

القيم الذاتية للمصفوفة A : $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = -2 \end{cases}$

البحث عن الشعاع: $\vec{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

بتطبيق العلاقة $(A-\lambda\, I_n)\vec{X} = 0_E$ نجد الجملة الخطية الاتية :

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (-1-\lambda)x & y & -z \\ -x & (1-\lambda)y & z \\ -2x & 2y & -\lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (-1-\lambda)x & +y & -z = 0 \\ -x & +(1-\lambda)y & +z = 0 \\ -2x & +2y & -\lambda z = 0 \end{cases}$$

الحالة الأولى $\boldsymbol{\lambda = 0}$

$$\begin{cases} -x+y-z=0 \\ -x+y+z=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases}$$

(1)-(2) $\leftarrow$ $-2Z = 0$; z=0 ومنه x=y

$$\vec{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ شعاع ذاتي موافق للقيمة الذاتية : $\lambda = 0$

$E_0 = \{\propto (1,1,0), \propto \epsilon ®\}$

E_0 فضاء شعاعي جزئي ذاتي مرافق ل : $\lambda = 0$

الحالة الثانية $\boldsymbol{\lambda = 2}$

(1)+(2) $\leftarrow$ -4x = 0 ; x=0 ومنه z=y

$$\vec{X}\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ شعاع ذاتي موافق للقيمة الذاتية : $\lambda = 2$

E_2={$\propto$ (0,1,1), $\propto \epsilon$®}

E_2 فضاء شعاعي جزئي ذاتي مرافق ل: $\lambda = 2$.

الحالة الثالثة $\boldsymbol{\lambda = -2}$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -x+3y+z=0 \\ -2x+2y+2z=0 \end{cases}$$

(1) +(2) ← y=0 ; 4y = 0 ومنه Z=x

$$\vec{X}\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ شعاع ذاتي موافق للقيمة الذاتية: $\lambda = -2$

E_{-2}={$\propto$ (1,0,1), $\propto \epsilon$®}

E_{-2} فضاء شعاعي جزئي ذاتي مرافق ل: $\lambda = -2$.

بالتوفيق