Présentation de la solution détaillée de l'exercice 6

Exercice 6 : Soit $E = IR^n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P) = P + (1 - X)\, P'$$

Montrer que f est un endomorphisme de E, donner une base de Imf et de $Ker(f)$.

Correction de l'exercice 6 :

On a $f(P) = P + (1 - X)\, P'$ une application de E dans E tel que $E = IR^n[X]$

1. Montrons que f est une application linéaire:

Pour montrer que f est une application linéaire il faut montrer que

$$\forall P_1, P_2 \in E, \forall \lambda \in IR,\ f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$$

ou

1-$\forall P_1, P_2 \in E, \forall \lambda \in IR,\ f(P_1 + P_2) = f(P_1) + f(P_2)$ (la stabilité de la somme) et

2-$\forall P \in E, \forall \lambda \in IR,\ f(\lambda P) = \lambda f(P)$

En utilisant la première définition, on pose deux éléments P_1, P_2 *de E et* λ un scalaire dans IR, on montre que

$$f(\lambda P_1 + P_2) \stackrel{?}{=} \lambda f(P_1) + f(P_2)$$

on a $f\ (\lambda P_1 + P_2) = \lambda P_1 + P_2 + (1 - x)(\lambda P_1 + P_2)'$

$$= \lambda P_1 + P_2 + (1 - x)(\lambda P'_1 + P'_2)$$

$$= \lambda(P_1 + (1 - x)P'_1) + P_2 + (1 - x)P'_2$$

$= \lambda f(P_1) + f(P_2)$, d'où f est une application linéaire.

2. Donnons une base de $Ker(f)$ (le noyaux de l'application f)

Le $Kerf$ est l'ensemble des éléments de E c'est-à-dire des polynômes de $IR^n[X]$ tel que leurs images est l'élément neutre de E, autrement dit c'est l'image réciproque de l'élément neutre de E (le polynôme nul dans ce cas

Par définition le noyaux de l'application f est définit par l'ensemble suivant

$$Ker(f) = \{P \in E / f(P) = 0\}$$

C'est-à-dire on va chercher les polynômes qui vérifie $f(P) = 0$

$f(P) = 0 \Rightarrow P + (1 - X)P' = 0,$ (c'est une équation différentielle)

les polynômes qui vérifie cette équation sont de la forme

$P(x) = \lambda(x-1), \lambda \in IR,$ ainsi $Ker(f) = \{\lambda(x-1), \lambda \in IR\}$ et une bas de $kerf$ est donnée par un seul vecteur : $x - 1$ et $dimKer(f) = 1.$

3. Donnons une base de Im(f)

On a $E = IR_n[x]$, $f: E \to E$ et comme $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ est une base de E(R
$= \{f(1), f(x), f(x^2), \dots, f(x^n)\}$ est une partie génératrice de $Im(f)$ (d'apr

On sait, d'après le théorème du rang $(dimImf + dimKerf = \dim E)$, que
dimension n (car la $dimKerf = 1$ et $dimE = n + 1$ alors

$dimImf = dimE - dimKerf$), il suffit donc d'en extraire une famille libr

On a

$f(1) = 1,$

$f(x) = 1,$

on remarque que pour $k = 2, \dots, n$, $f(x^k)$ est de degré k sans termes constant $(f(1) = 1, f(x) = 1)$,

d'où $f(x), f(x^2), \dots, f(x^{\mathrm{n}})$ sont de degré différents c'est − à − dire c′est des éléments linéairement indépendants,

(Nous avons éliminé $f(1)$ car $f(x) = f(1)$)

donc l'ensemble $B' = \{f(x), f(x^2), \dots, f(x^{\mathrm{n}})\}$(on a pris $f(x)$ car $f(x) = f(1) = 1$) est une famille de n vecteurs appartenant à $Im(f)$ est libre.

Donc comme B' est génératrice de $Im(f)$ et libre alors B' forme une base de $Im(f)$.

- ***Rappel 1:*** $\{\mathbf{1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}, \dots, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}\}$ est une base de $IR_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à n. D'où la dimension de $IR_n[x]$ est $n+1$,

- ***Rappel 2:*** Si $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ est une famille génératrice et si

$e_{n+1} \in Vect(e_1, \dots, e_n)$, alors la sous-famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice

- ***Rappel 3:*** Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E alors $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$est une famille génératrice de Imf $où$ f est une application définie de E dans E