Solution de l’exercice 2, série 2 (suite)

Présenté par:
Dr. H. Benlarbi

Equations Différentielles de second degrés

- Exercice 02: Résoudre les équations différentielles suivantes:
- a) $y'' - 2y' + y = 0,$
- b) $y'' + 9y = x + 1.$

- La première équation, à savoir

$$y'' - 2y' + y = 0$$

est un équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants.

Dans ce qui suit, on va donner un bref rappel sur la résolution de ce type d'équation.

Rappel 1

- La solution de l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad ....(1)$$

dépend des racines de l'équation caractéristique associé à l'équation (1), qui est

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Qui, comme tous le monde le sait, possède soit:

- 1) Deux racines réelles distinctes λ_1, λ_2

la solution générale alors de l'équation (1) est :

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}; \quad c_1, c_2 \in IR$$

2) Une racine double λ, dans ce cas

la solution générale de l'équation (1) est:

$$y = (c_1 x + c_2) e^{\lambda x}; \; c_1, c_2 \in IR$$

- 3)Deux racine complexes

$$\lambda_1 = \alpha + i\,\beta;\ \lambda_2 = \alpha - i\,\beta$$

La solution générale de l'équation (1) est:

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta c\right)$$

- Revenons à notre équation, à savoir

$$y'' - 2y' + y = 0$$

- L'équation caractéristique associée est

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Et qui a une racine double $\lambda = 1$ d'où la solution de notre équation différentielle est

$$y = (c_1 x + c_2)e^x ; \text{ avec } c_1, c_2 \text{ des constantes réelles.}$$

Rappel 2

- La solution générale d'une équation différentielle de second ordre à coefficients constants non homogène

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

P_n étant un polynôme de degré n, est de la forme

$$y = y_0 + y_p$$

où y_0 est la solution de l'équation homogène (voir Rappel1) et y_p est une solution particulière qu'on cherchera comme suit

$$\text{Si } f(x) = P_n(x)e^{ax}$$

(P_n est un polynome de degrés n)

- 1)si a n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors on cherche la solution particulière sous la forme:

$$y_p = Q_n(x)e^{ax}$$

Où Q_n est un polynôme de même degrés que P_n

.2) si a est pas une racine simple de l'équation caractéristique, alors on cherche la solution particulière sous la forme:

$$y_p = xQ_n(x)\,e^{ax}$$

- 3) si a est une racine double de l’équation caractéristique, alors on cherche la solution particulière sous la forme:

$$y_p = x^2 Q_n(x) e^{ax}$$

- Reprenons notre équation
- $$y'' + 9y = x + 1 \quad \text{......(2)}$$
- Comme on l'a vu dans le rappel 2, on cherchera la solution générale de (2) sous la forme $y = y_0 + y_p$ où y_0 est la solution de l'équation homogène et y_p une solution particulière

Calcule de la solution Homogène

- L'équation caractéristique associée à (2) est

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

possède deux racines complexes

$$\lambda_1 = 3i \text{ et } \lambda_2 = -3i \quad \left(\alpha \pm i\,\beta \text{ avec } \alpha = 0, \beta = 3\right)$$

- D'où la solution homogène est

$$y_0 = e^{0x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) = (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

(avec c_1, c_2 deux constantes réelles)

La solution particulière

- La solution particulière est une solution qu'on cherchera suivant la forme du second membre de l'équation différentielle.
- Dans le cas de (2), on a $f(x) = x + 1 = e^{0x}(x+1)$
- Et comme *0* n'est pas une solution de l'équation caractéristique de (2), on cherche la solution sous forme $y_p = e^{0x}Q_1(x) = a_1x + b_1$

avec a_1 et b_1 des constantes qu'on déterminera

Pour calculer les constantes, on dérive deux fois y_p et on remplacera dans (2), on aura :

$y_p' = a_1 \Rightarrow y_p'' = 0$ qu'on remplacera dans (2), on obtient

$$0 + 9(a_1 x + b_1) = x + 1,$$

d'où en identifiant les deux membres, on aura

$$a_1 = b_1 = \frac{1}{9} \Rightarrow y_p = \frac{1}{9}(x + 1)$$

- D’où la solution générale de l’équation différentielle (2) est :

$$y = y_0 + y_p \Longrightarrow$$

$$y = c_1 \cos 3\mathrm{x} + \mathrm{c}_2 \sin 3x + \frac{1}{9}(x + 1)$$