

CH-VI-Lois de comportement élastique linéaire- parfaitement plastique de Mohr-coulomb

I-Introduction

Ce type de loi est caractérisé par un écrouissage nul et généralement utilisée dans le domaine de la géotechnique. Elle est souvent utilisée pour représenter la rupture par cisaillement dans les sols.

A partir d'un essai triaxial sur échantillon qui donne la variation du déviateur de contrainte

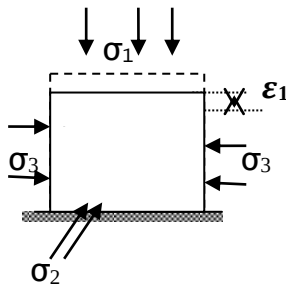


Fig 1 : échantillon triaxial

en fonction de la déformation axiale ϵ_1 figure1

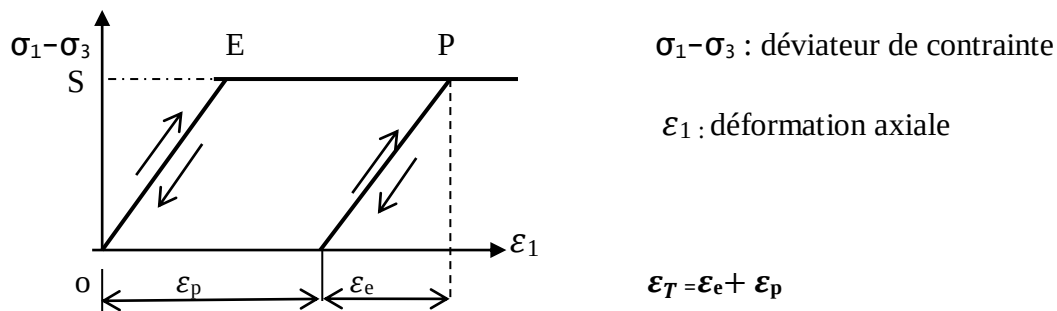
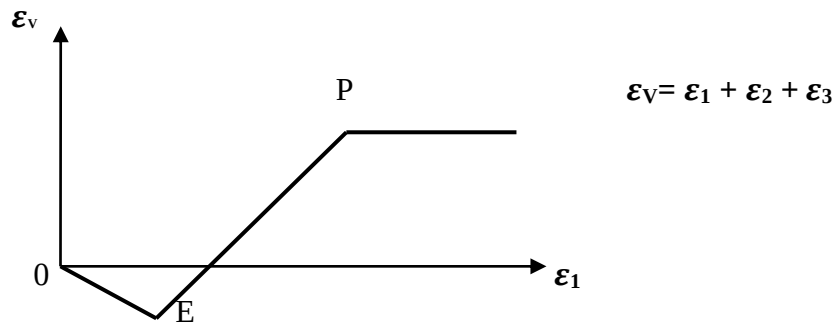


Fig 2. Courbe déviateur- déformation axiale
(loi élastique-linéaire parfaitement plastique)

- **Interprétation de la courbe**

Sous un premier chargement, si le déviateur est inférieur au seuil de plasticité ($\sigma_1 - \sigma_3 < S$), le comportement du matériau est élastique linéaire partie OE sur la figure 2.

Entre les points O et E, le volume du matériau diminue, proportionnellement à la déformation axiale. Quand le déviateur atteint le seuil de plasticité S, suivant l'état initial du sol et la contrainte σ_3 , le volume de l'échantillon augmente, il se dilate, c'est le phénomène de **dilatance**, ou se contracte phénomène de **contractance** figure3. Pour de grandes déformations, au delà du point P, par exemple, on atteint l'état critique pour lequel la déformation volumique ϵ_v ne varie plus



**Fig 3 : Courbe déformation volumique-déformation axiale
(Loi élastique-linéaire parfaitement plastique)**

Comme le montre la figure2, le comportement du matériau est illustré par deux parties :

- la partie OE qui représente le domaine élastique linéaire.
- la partie OP qui correspond au domaine parfaitement plastique (sans écrouissage).

Chaque partie de la courbe sera décrite par une loi.

II-Loi de comportement élastique linéaire

Sur la figure 2, la partie OE état élastique linéaire, si le massif est homogène et isotrope, dans ce domaine le matériau obéit à la loi de Hooke qu'on peut écrire sous forme tensorielle :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\text{tr}\underline{\underline{\epsilon}}) (\underline{\underline{1}}) + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}} \quad \text{équation de Lamé}$$

σ_{ij} : tenseur des contraintes

ϵ_{ij} : tenseur des déformations

$(\underline{\underline{1}})$: matrice unité

λ et μ : étant les coefficients de Lamé et sont donnés par:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ;$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} ;$$

E : module de Young

ν : coefficient de poisson : $0 < \nu < 0,5$

En transformant les équations de lamé en fonction de $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{\nu}}$ pour écrire les équations de Hooke en tridimensionnel.

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \{ \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr}\epsilon_{ij}) (\underline{\underline{1}}) \}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \sigma_{ij}) \quad (1) \quad (\text{voir cours d'élasticité})$$

III-Loi de comportement parfaitement plastique

Le modèle de Mohr-coulomb est un modèle souvent utilisé pour représenter la rupture par cisaillement dans les milieux continus notamment dans les sols.

Cette loi se caractérise par une élasticité linéaire isotrope de Hooke caractérisée par (E, ν)

Une surface de charge **F** (σ_{ij}) et un potentiel plastique **g** (σ_{ij})

La fonction de charge est donnée par :

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi - (\sigma_1 - \sigma_3) + 2c \cos \varphi$$

Le potentiel plastique de cisaillement **g** (σ_{ij}) correspond à une loi d'écoulement donnée par l'équation de Hill :

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1 - \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi} \sigma_3$$

E : module de Young

ν : coefficient de poisson

c : cohésion

φ : angle de frottement interne du sol

ψ : angle de dilatance

ψ : angle de dilatance du sol qui représente l'augmentation de volume du sol qui se produit pendant le cisaillement.

Le contraire de la dilatance est la contractance

Lorsque $\psi = \varphi$: la dilatance est maximale, la loi est dite associée **F=g**.

Au total le modèle de Mohr-Coulomb comporte cinq paramètres

Son seuil de plasticité est donné par :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi + 2c \cos \varphi$$

Si $(\sigma_1 - \sigma_3) < (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi + 2c \cos \varphi$: le matériau est dans le domaine élastique

Si $(\sigma_1 - \sigma_3) = (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi + 2c \cos \varphi$: le matériau est dans le domaine plastique

Si $(\sigma_1 - \sigma_3) > (\sigma_1 + \sigma_3) \sin\varphi + 2c \cdot \cos\varphi$: état de contrainte physiquement impossible en élastoplasticité

IV-Caractéristiques de la loi de Mohr coulomb

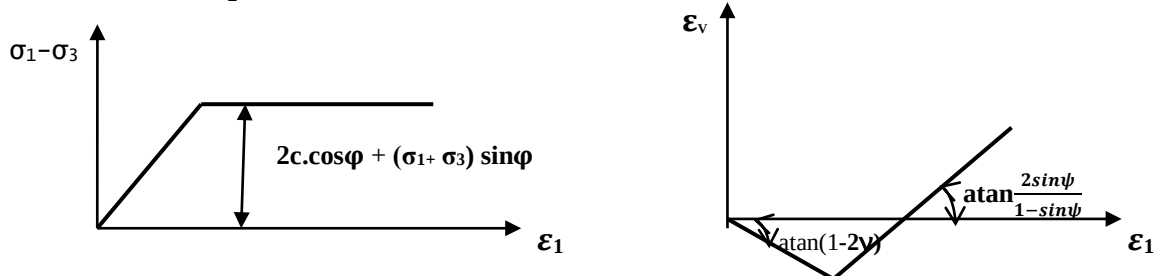


Fig4 : caractéristiques da la loi élastique linéaire parfaitement plastique.
Critère de rupture de Mohr-Coulomb

IV-1-Etude des paramètres da la loi de Mohr-Coulomb

IV-1-1-Détermination de E, ν et ψ

Le seuil de plasticité ayant été défini, on détermine les paramètres des relations entre le déviateur et la déformation volumique en fonction de la déformation axiale figure5

a)-Détermination de E, ν

Le module de Young E et le coefficient de poisson ν sont des paramètres d'élasticité. Dans le cas d'un sol ces derniers sont obtenus en considérant tout simplement que dans l'essai triaxial $d\epsilon_2 = d\epsilon_3$ et $d\sigma_2 = d\sigma_3 = 0$ et en appliquant l'équation de Hooke généralisée on obtient

$$d\sigma_1 = E d\epsilon_1$$

Le coefficient de poisson se détermine de la même manière en appliquant la loi de Hooke généralisée dans les mêmes conditions : $d\epsilon_2 = d\epsilon_3$ et $d\sigma_2 = d\sigma_3 = 0$ ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d\epsilon_v}{d\epsilon_1} = 1 - 2\nu$$

b)-Détermination de l'angle de dilatance ψ

Pour calculer l'angle de dilatance, on montre que le rapport de la variation de volume plastique de l'échantillon de sol dans un essai triaxial est donné par :

$$\frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_1^p} = \frac{-2\sin\psi}{1 - \sin\psi}$$

Avec

$d\epsilon_v^p$: Déformation volumique plastique

$d\varepsilon_1^p$: Déformation plastique axiale

La figure 4 indique à partir de l'enregistrement de la variation de volume de l'échantillon ε_v en fonction de la déformation axiale ε_1 l'angle de dilatance ψ qui caractérise l'augmentation de volume pendant le cisaillement.

L'angle de dilatance ψ peut au plus être égal à l'angle de frottement interne φ

La règle d'écoulement est déjà définie dans le chapitre précédent