

CH -IV- Concepts caractéristiques des lois de Comportement élastoplastiques

1- Introduction

Dans toute étude, la modélisation est une étape décisive qui conditionne la qualité des analyses de diagnostic ou de prévision des comportements des matériaux.

Faire une modélisation revient à écrire un modèle mathématique dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Ce modèle peut être caractérisé par une loi de comportement.

Le développement d'une loi de comportement s'appuie à la fois sur les schémas théoriques de la mécanique des milieux continus et les résultats expérimentaux obtenus en laboratoires ou in-situ (modèle rhéologique).

II- définition

Une loi de comportement d'un matériau est une relation fonctionnelle entre les grandeurs cinématiques telles que les déformations ou les vitesses de déformation, et les grandeurs statiques comme les contraintes.

La connaissance de la loi de comportement est indispensable pour rendre complet le système des équations de la mécanique des milieux continus (calcul des structures). En effet, tout problème de mécanique comporte quinze inconnues, à savoir les six composantes indépendantes du tenseur des contraintes (σ_{ij}), les six composantes du tenseur des déformations (ε_{ij}) et les trois composantes du champ de déplacements (u_{ij}).

III-Elaboration d'une loi de comportement

L'élaboration d'une loi de comportement consiste à construire une relation fonctionnelle au moyen d'un modèle mathématique (équations mathématiques) permettant d'exprimer les efforts intérieurs (contraintes) en fonction des grandeurs cinématiques décrivant les déformations du milieu.

IV-Loi de comportement élastoplastique

IV-1Comportement élastoplastique

Un comportement du type élastique linéaire ne peut être utilisé qu'en première approche car il ne permet pas de prendre en compte de déformations irréversibles. La plus part des

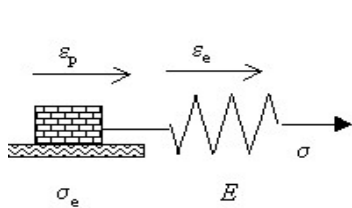
matériaux sont en effet élastoplastiques : leur comportement est caractérisé par l'apparition de déformations élastiques et des déformations plastiques.

Les modèles élastoplastiques sont basés sur trois notions fondamentales :

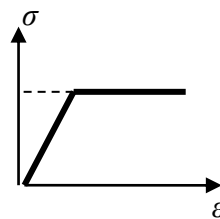
- ⊕ - **la surface de charge : (ou critère de plastification)** : qui définit le seuil de contrainte au delà du quel le comportement du matériau devient irréversible (plastification)
- ⊕ - **la règle d'écrouissage** : caractérise l'évolution de la surface de charge dans le domaine des contraintes.
- ⊕ - **la règle d'écoulement plastique (loi de normalité)** : décrit la manière dont évoluent les déformations plastiques.

VI-Elastoplastique parfait

Dans ce cas l'écrouissage est nul, le modèle correspond au cas idéal où le seuil d'écoulement est indépendant de la déformation plastique. Il peut être schématisé par un modèle analogique composé d'un ressort figure (1.a) traduisant l'état élastique et d'un patin schématisant l'état plastique.



(a) Modèle analogique



(b) courbe de traction (élastoplastique parfait)

Fig 1 : modèle élastoplastique parfait (sans écrouissage)

VI-1- Notion surface de charge.

Comme il a été déjà défini dans le paragraphe précédent, dans l'espace des contraintes, le domaine d'élasticité initial ou actuel est en général défini par une fonction scalaire F du tenseur des contraintes (σ_{ij}) appelée fonction de charge, surface de charge ou encore seuil de plasticité $F(\sigma_{ij})$. Elle divise l'espace des contraintes en deux parties telle que:

$F(\sigma_{ij}) < 0$ domaine élastique

$F(\sigma_{ij}) = 0$ domaine plastique

$F(\sigma_{ij}) > 0$ état de contraintes physiquement impossible

La déformation plastique se produit lorsque l'état de contrainte atteint la surface de charge $F(\sigma_{ij})=0$ et sa direction est donnée par le potentielle plastique $g(\sigma_{ij})$,

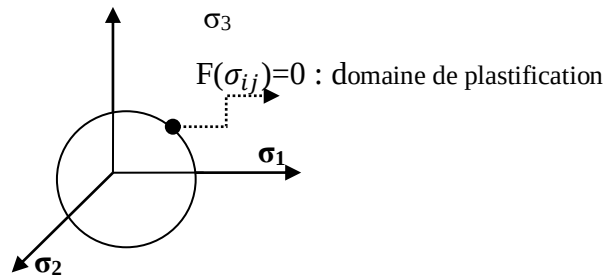


fig 2 : surface de charge (plasticité parfaite)

Les fonctions $F(\sigma_{ij})$, $g(\sigma_{ij})$, seront définies à la fin de ce chapitre

VII- Elastoplastique avec écrouissage

L'évolution des déformations plastiques dans le domaine plastique des matériaux écrouissables conduit à un changement de limite élastique (appelé écrouissage) figure.2. La surface de charge se dilate et se déplace au fur et à mesure que les déformations plastiques évoluent. Lorsque la surface de charge se dilate on parle d'écrouissage isotrope et lorsqu'elle se déplace on parle d'écrouissage cinématique.

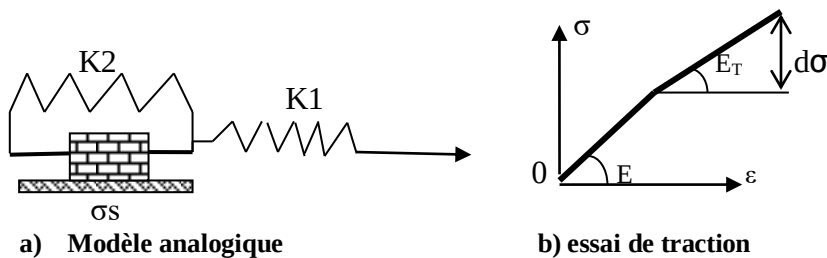


Fig 3 : Modèle élastoplastique avec écrouissage

E : étant le module de Young

E_T : étant le module tangent (caractéristique de l'écrouissage)

- Le ressort $K1$ représente le domaine élastique
- Le ressort $K2$ représente l'écrouissage.
- Le patin représente la plasticité.

De la figure (3b) on peut écrire :

$$d\sigma = E_T \cdot d\varepsilon \text{ incrément de contrainte}$$

Avec

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p \text{ : incrément de déformation totale}$$

et

$$d\sigma = H \cdot d\varepsilon_p$$

or
$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} + d\varepsilon_p \implies d\sigma \left(1 - \frac{E_T}{E}\right) = E_T d\varepsilon_p$$

d'où
$$H = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} : \text{appelé module d'écrouissage}$$

$d\sigma$: incrément de contrainte

$d\varepsilon$: incrément de déformation totale

$d\varepsilon_e$: incrément de déformation élastique

$d\varepsilon_p$: incrément de déformation plastique

VII-1-Ecrouissage isotrope

VIII-1-1-Surface de charge

Dans le cas de l'écrouissage isotrope la surface de charge se dilate d'où l'augmentation du domaine élastique figure 4.

Le domaine d'élasticité actuel dépend de l'état de l'écrouissage que l'on caractérise par une variable K introduite dans l'expression de la surface de charge qui sera notée,

$F(\sigma_{ij}, K)$. L'état de l'écrouissage K n'évolue que lorsqu'il ya évolution de la déformation.

Sur la frontière du domaine, on a :

$$F(\sigma_{ij}, K) = 0 \quad (2)$$

L'équation (2) est appelée également surface seuil de plasticité ou parfois critère de plasticité

σ_{ij} : Tenseur des contraintes.

K : Paramètre d'écrouissage.

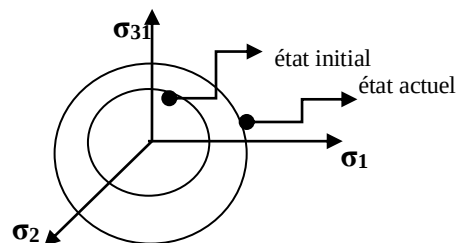


Fig 4 : écrouissage isotrope

Soit σ_{ij} un état de contraintes correspondant à l'étape de chargement donné. Si cet état est tel que $F(\sigma_{ij}, K) < 0$: σ_{ij} est à l'intérieur du domaine élastique actuel, la variation de la déformation est purement élastique.

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e$$

Si cet état est sur la frontière tel que $F(\sigma_{ij}, K) = 0$: σ_{ij} se trouve sur la frontière du domaine. Pour ce cas de comportement, il convient de distinguer selon que le corps est en chargement (tendance à sortir du domaine d'élasticité) ou en déchargement (tendance à retourner dans le domaine élastique).

Dans ces conditions :

il y a chargement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\sigma_{ij}, K) = 0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Donc : } \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

il y a déchargement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\sigma_{ij}, K) = 0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Donc : } \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e$$

VIII-2- Notion de loi d'écoulement Plastique

La loi d'écoulement (**ou règle d'écoulement**) plastique exprime l'accroissement de la déformation plastique appelée **incrément de déformation** en fonction des états de contraintes et d'écrouissage par l'intermédiaire du potentiel plastique $g(\sigma_{ij})$, qui peut être différent de la fonction de charge $F(\sigma_{ij})$.

L'incrément de déformation plastique est caractérisé par sa direction et son amplitude. La direction de l'incrément de déformation plastique est perpendiculaire à la surface de charge (d'où le nom de **loi de normalité**) définissant le potentiel plastique $g(\sigma_{ij})$. La forme générale de l'incrément de déformation plastique est donnée par l'équation (3) et sa direction est définie par le potentielle plastique.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3) \text{ équation de normalité plastique}$$

Celle-ci doit être à tout instant normale à la fonction de charge figure 5.

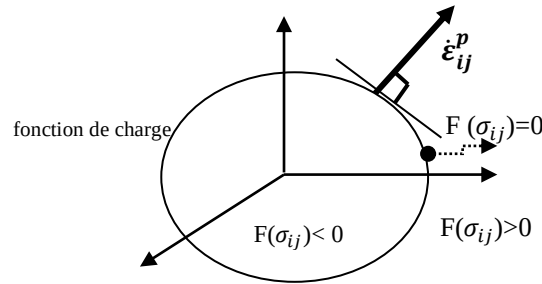


Fig 5 ; règle de normalité

Où $\dot{\lambda}$ est la constante de proportionnalité connue sous le nom de **multiplicateur plastique** et sera déterminé par la loi de consistance.

$$\dot{\lambda} = 0 \text{ si } \begin{cases} \mathbf{F} < 0 \\ \text{ou} \\ \mathbf{F} = 0 \text{ et } \dot{\mathbf{F}} < 0 \end{cases}$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \text{ si } \mathbf{F} = \dot{\mathbf{F}} = 0$$

VIII-2-2-Détermination du multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$

Afin de définir complètement la loi de comportement, il convient de déterminer la valeur du multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ indiqué dans la loi de normalité (équation 3). Sa valeur est obtenue en considérant la condition de consistance donnée par :

$$\dot{\mathbf{F}}(\sigma_{ij} - \mathbf{K}) = 0. \quad (1)$$

Cette loi indique que la contrainte doit rester sur la surface de charge au cours du chargement $\mathbf{F} = 0$.

La condition de consistance (1) s'écrit alors:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial K} \dot{K} = 0$$

D'où

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = - \frac{\partial F}{\partial K} \dot{K} = 0 \quad (2)$$

Le module d'écrouissage $H(\sigma_{ij}, K)$, peut être également déterminé par la relation :

$$H. \dot{\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (3)$$

Dans le cas de l'écrouissage isotrope, la variable d'écrouissage K est une fonction scalaire de la déformation plastique (ϵ_{ij}^p) donc

$$K = K(\epsilon_{ij}^p) \quad (4)$$

Des relations précédentes on peut avoir :

$$H. \dot{\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = - \frac{\partial F}{\partial K} \dot{K} = - \left(\frac{\partial F}{\partial K} \right) \left(\frac{\partial K}{\partial \epsilon_{ij}^p} \right) \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (5)$$

Et en tenant compte de la règle de normalité on obtient ; si $\dot{\lambda} \neq 0$

$$H = - \left(\frac{\partial F}{\partial K} \right) \left(\frac{\partial K}{\partial \epsilon_{ij}^p} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right) \quad (6)$$

Comme il a été défini au précédemment, les incréments de déformation élastique $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ et de contrainte $\dot{\sigma}_{ij}$ sont liés par le tenseur d'élasticité E_{ijkl} ou l'inverse du tenseur d'élasticité S_{ijkl} .

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} . \dot{\epsilon}_{ij}^e \quad (7)$$

Ou

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = S_{ijkl} . \dot{\sigma}_{ij}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} . \dot{\epsilon}_{kl}^e = E_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl}^e - \dot{\epsilon}_{kl}^p) = E_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl}^e - \dot{\lambda} \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right))$$

Et en multipliant chaque membre par $\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right)$, il vient que :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right) \dot{\sigma}_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right) E_{ijkl} . \dot{\epsilon}_{kl}^e - \dot{\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right) E_{ijkl} \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}} \right) = \dot{\lambda} H$$

Finalement l'expression du multiplicateur plastique s'écrit :

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}}{H + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (8) \quad \text{multiplicateur plastique}$$

Dés à présent, on peut établir la relation incrémentale. La relation liant les incréments de contraintes aux incréments de déformations est donnée par :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left\{ E_{ijkl} - \frac{\left(E_{ijmn} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{mn}} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{rskl} \right)}{H + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} \right) E_{mnrs} \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right)} \right\} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (9) \quad (\text{à démontrer en td})$$

Qu'on peut recopier sous la forme

$$\dot{\sigma}_{ij} = (E_{ijkl} - E_{ijkl}^P) \dot{\epsilon}_{kl}$$

Finalement on aboutit à :

$$E_{ijkl}^P = \frac{\left(E_{ijmn} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{mn}} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{rskl} \right)}{H + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} \right) E_{mnrs} \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right)} \quad (10)$$

Le tenseur ainsi trouvé équation (10), représente le tenseur d'élastoplasticité.

Pour les matériaux non écrouissables c'est-à-dire parfaitement plastiques la relation de comportement peut être déduite de la précédente en posant tout simplement $H=0$.

VII-2-Ecrouissage cinématique

Dans le cas de l'écrouissage cinématique, la surface de charge se translate. En d'autres termes son centre de gravité change. Les frontières d'élasticité successives se déduisent de la frontière initiale par translation dans l'espace des contraintes. L'écrouissage va alors dépendre d'un paramètre tensoriel $\mathbf{X}$ représentant le centre du domaine et la fonction de charge sera notée dans ce cas $\mathbf{F}(\sigma_{ij}, \mathbf{X})$.

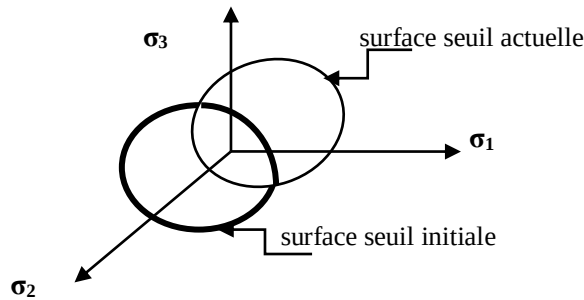


Fig 5 : écrouissage cinématique

La règle de normalité est donnée par

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma_{ij}, X)}{\partial \sigma_{ij}}$$

VIII-Ecrouissage cinématique mixte

Certains matériaux peuvent présenter à la fois un écrouissage isotrope et un écrouissage cinématique. Dans ce cas on parle d'écrouissage mixte et sa fonction de charge est donnée par

$$F(\sigma_{ij}; X; R) = F(\sigma_{ij} - X) - R = 0$$

Sa règle de normalité est donnée par

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma_{ij}, X, R)}{\partial \sigma_{ij}}$$

Les variables d'écrouissage X et R seront définies dans le chapitre traitant les lois de comportement.

Rq : Le point ($\dot{}$) désigne les dérivées par rapport au temps (dérivées temporelles).

IX-Matériau standard et non standard

Lorsque $g \neq F$ le matériau est dit **non standard** et la loi est non associée, on distingue une fonction de charge **F** et une fonction potentielle **g**. Cependant la relation $F = g$ pour ce cas on parle de plasticité associée et le matériau est dit **<<standard>>**. Dans ce dernier cas la règle de normalité peut s'écrire :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F(\sigma_{ij}, X, R)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4)$$

Dans le cas de la plasticité parfaite il suffit de prendre $X=R=0$

L'équation de normalité s'écrit alors :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4)$$

Ces paramètres seront calculés de la même manière que les paramètres du paragraphe VII