

CH-III- Critères et Fonctions de charge (ou fonction d'écoulement)

La condition d'écoulement détermine la limite entre les régions élastiques et les régions non élastiques. Par conséquent la limite peut être localisée par des considérations élastiques. La quantité définissant une condition d'écoulement doit être une certaine fonction des contraintes et des déformations. Comme, dans un corps élastique, les déformations sont uniquement déterminées par les contraintes et le comportement rhéologique du matériau, la fonction de charge doit l'être également.

I-Comportement élastoplastique parfait

Ce comportement est illustré par la figure suivante

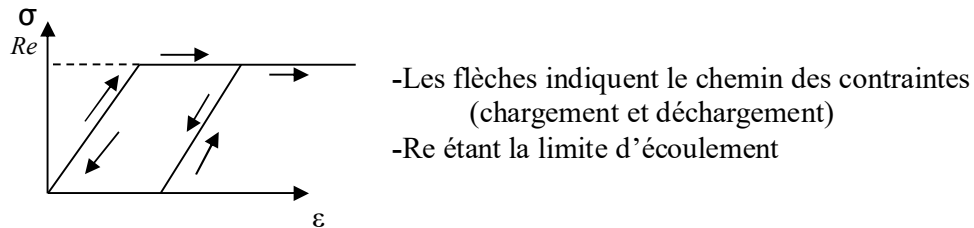


Fig.1 Schéma de comportement élastoplastique parfait

Le modèle de la (figure1), considéré comme idéal, pour lequel la courbe contrainte-déformation présente un palier horizontal et son seuil de plasticité Re demeure constant, c'est –à dire que l'écrouissage du matériau disparaît, est associé à la notion de **ductilité** par opposition à la **fragilité** qui donne une rupture brutale lorsque le seuil d'élasticité est atteint.

II-Fonction de charge

La fonction d'écoulement ou fonction de charge est représentée par une surface appelée surface de charge (**seuil de plasticité**). Dans un repère quelconque, la fonction d'écoulement peut être exprimée par : $F(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{zy})=0$ et dans un repère principal elle s'exprime par : $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)=0$.

Ou en simplifiant l'écriture $F(\sigma_{ij})=0$ avec σ_{ij} tenseur des contraintes.

Pour un matériau isotrope, la valeur de F doit rester la même si les composantes de la contrainte par rapport aux axes x, y, z sont remplacées par celles de n'importe quel autre système d'axes orthogonaux passant par le même point. Ainsi la fonction de charge F est invariant et peut s'écrire en fonction des invariants du tenseur déviatorique des contraintes: $F(J_1, J_2, J_3)=0$

J_1, J_2 et J_3 sont les invariants de l'état de contraintes et sont donnés par:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z.$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Des expériences montrent que l'écoulement plastique n'est pas affecté par une pression hydrostatique. Donc la fonction d'écoulement F dépend de la forme des invariants du tenseur déviatorique de contraintes. Ces invariants (dans un repère principal) seront les invariants du tenseur déviatorique et sont notés J'_1, J'_2, J'_3 comme $J'_1 = 0$

La fonction de charge se réduit à : $F(J'_2, J'_3) = 0$ (à calculer)

III-Comportement élastoplastique avec écrouissage

Pour mieux comprendre la notion d'écrouissage, nous allons considérer le cas d'un essai de traction ou compression simple figure 2.

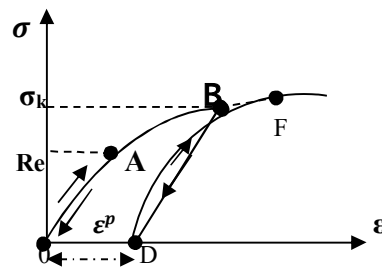


Fig.2 : Essai de traction uniaxiale d'un matériau

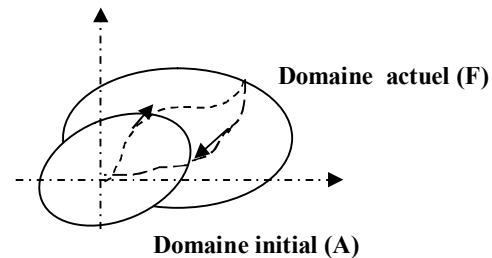


Fig 3: Domaine d'élasticité initial et actuel

Dans la figure 2, la partie OA représente le domaine élastique. Le point A représente le seuil au delà du quel on n'a plus le comportement élastique. En franchissant le seuil et si au point B en décharge par exemple le chemin de déchargement ne sera pas BO mais sera BD. La déformation $OD = \epsilon^p$ sera irréversible (déformation plastique). Si on recharge à partir de cet état (état actuel), le chemin sera DF. Le point F étant le prolongement du chemin OB. Il rejoint le chemin du premier chargement (état initial). Dans ces conditions on peut assimiler la courbe BD à la droite DF et admettre que les déformations sont réversibles le long de cette ligne. Le nouveau seuil de plasticité devient le point B et sa limite d'écoulement sera σ_k . Cette élévation du seuil de plasticité s'appelle **écrouissage**.

La surface de charge, dans ce cas, va dépendre de paramètre d'écrouissage **K** ou **X** selon qu'il s'agit d'écrouissage isotrope ou cinématique ou les deux en même temps

La fonction de charge prend la forme : $F(\sigma_{ij}, K, X)=0$

IV- Critères et fonction de charge

Un critère de plasticité ou critère d'écoulement plastique, est un critère permettant de savoir, sous des sollicitations données, si une pièce s'écoule dans le domaine plastique ou si elle reste dans le domaine élastique. Et sa fonction de charge indique le seuil de l'écoulement plastique.

IV-1-1-Critère de Tresca (critère du maximum de la contrainte tangentielle)

Tresca a montré que l'écoulement du matériau c'est-à-dire la déformation non élastique commence en point lorsque la contrainte tangentielle (contrainte de cisaillement) devient maximum et atteint une valeur critique.

si $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ Cette condition est exprimée par l'équation suivante :

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq k_1 \quad (1)$$

K_1 représente une constante déterminée d'ordinaire par une simple expérience au laboratoire.

Par exemple pour la traction simple nous aurons : $K_1 = Re$

où **Re** représente la limite en traction simple.

Pour le cas d'un sol purement cohérent $K_1 = 2c$

L'expression (1) fait apparaitre que le critère de Tresca consiste à limiter la différence entre les contraintes principales extrêmes, la contrainte **intermédiaire** n'intervient pas dans un tel critère.

Mais en général, on ne sait pas d'avance quelle est la combinaison de contraintes principales qui donne la contrainte de cisaillement maximal. Dans ce cas la condition est exprimée sous sa forme générale par :

$$[(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - K_1^2][(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - K_1^2][(\sigma_2 - \sigma_1)^2 - K_1^2] = 0 \quad (2)$$

IV-1-2-Représentation géométrique de la fonction de charge de Tresca

La fonction de charge du critère (1) s'écrit sous la forme suivante :

$$F(\sigma_1 - \sigma_3) - k_1 \leq 0$$

Comme la combinaison qui donne le cisaillement maximum, ne peut être connue d'avance la fonction de charge s'écrit d'une manière générale sous la forme:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sup(\sigma_i - \sigma_j) - k_1 \leq 0 \quad i, j=1,2,3 \quad (3)$$

La condition (3) fait sortir les six plans qui sont les limites de la surface de charge.

Ces six plans sont deux à deux parallèles à l'un des axes de coordonnées $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et les lignes d'intersection des plans sont parallèles à la droite Δ d'équation $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, appelée trissectrice.

En se plaçant dans un repère déviatorique quelconque on peut écrire les équations des six plans et représenter leur surface de charge figure (3a, 3b)

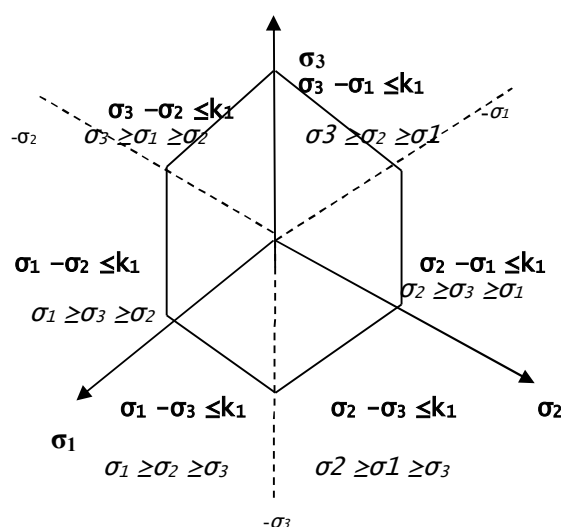


Fig 3a : Représentation de la surface de charge (hexagone régulier) de Tresca dans un plan déviatorique

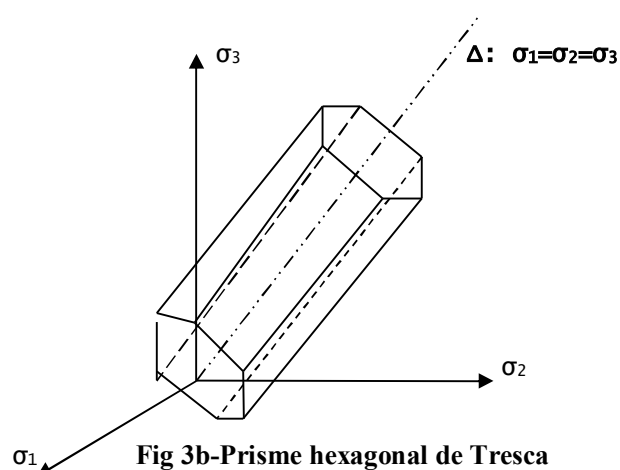


Fig 3b-Prisme hexagonal de Tresca

IV-2-I-Critère de Von Mises

Le critère de Von Mises qui exprime que le seuil de plasticité est lié à l'énergie potentielle de déformation de forme (énergie de cisaillement) obtenue à partir du tenseur déviatorique des contraintes. Ce critère va être directement lié au deuxième invariant du déviateur des contraintes étant donné qu'il ne fait pas intervenir la pression hydrostatique c'est-à-dire le tenseur sphérique. Et il a la forme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq K_2 \quad (4)$$

Avec $K_2 = R_e / \sqrt{3}$ déterminé par un essai de traction

IV-2-2-Fonction de charge de Von mises

Comme le critère de Von mises est lié uniquement au deuxième invariant du tenseur déviatorique J'_2 , sa fonction de charge ou bien fonction d'écoulement s'écrit alors :

$$F(J'_2) = J'_2 - K_2 \quad (5)$$

D'après l'équation (4) on voit bien que le domaine d'élasticité (surface de charge) est un cylindre d'axes Δ : $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$ et de rayon $K_2 \sqrt{2}$ figure 4.

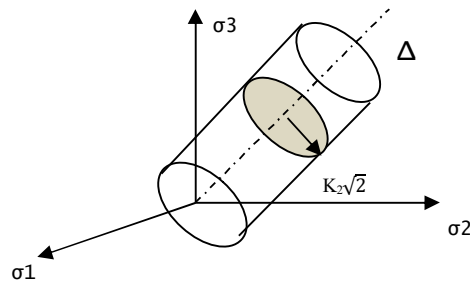


Fig 4 : Domaine d'élasticité relatif au critère de Von mises

IV-3-Comparaison entre les critères de Tresca et Von Mises

La condition d'écoulement de Tresca peut être représentée dans un plan par un hexagone dont le côté vaut k_1 et celle de Von Mises est un cercle de rayon $K_2 \sqrt{2}$

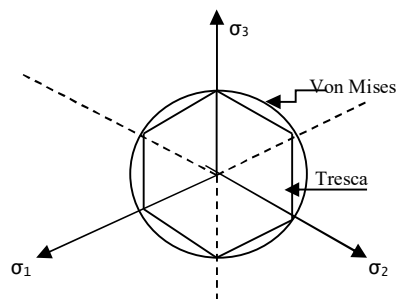


Fig.5 Comparaison entre le critère de Tresca et Von mises

Si le corps élastoplastique est isotrope, le critère de plasticité ne dépend pas de l'orientation des axes et on peut travailler dans le domaine des contraintes principales.

On peut constater d'après la figure 5 et les équations (3) et (4), que la plus grande différence entre les deux théories apparaît pour un état de cisaillement pur, c'est-à-dire lorsque $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = 0$ et $\sigma_3 = -\tau$

L'équation (1) (Tresca) prévoit $\tau = \frac{Re}{2}$

L'équation (4) (Von Mises) prévoit $\tau = \frac{Re}{\sqrt{3}}$

On voit bien que la théorie de Von Mises prévoit que l'écoulement en cisaillement pur apparaîtra pour une contrainte supérieure à celle prévue par Tresca.

IV-4-Critère de Mohr

Le critère de Mohr est basé sur la théorie de la courbe intrinsèque de Caquot.

IV-4-1-Courbe intrinsèque

En un point M d'un milieu, sur une facette quelconque s'exerce une contrainte d'obliquité θ , Caquot admet que si l'intensité de cette contrainte augmente, l'obliquité restant constante, l'apparition des déformations plastiques se manifeste par un glissement dans le plan de la facette lorsque l'intensité atteint une certaine valeur critique. Le point représentatif de la contrainte dans le plan de Mohr (figure 6) se déplace le long de **OP** pour atteindre le point p qui correspond à la limite du domaine élastique et au début de l'écoulement plastique. Lorsque sur la même facette, l'obliquité de la contrainte change, on observe une nouvelle valeur critique. La courbe R est appelée courbe intrinsèque

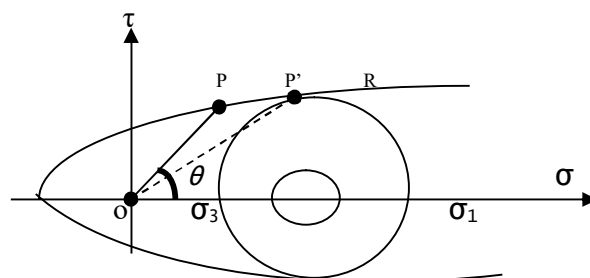


fig.6 courbe intrinsèque

Dans un milieu en équilibre, à chaque point correspond un cercle de Mohr.

Lorsque le cercle se trouve à l'intérieur de la courbe intrinsèque sans la toucher, l'équilibre est dit surabondant.

Lorsque le cercle est tangent à la courbe au point représentatif de la contrainte, cette dernière est dite contrainte critique : point P' sur la figure 6.

Dans ce cas on peut définir la courbe intrinsèque comme étant l'enveloppe de tous les cercles de Mohr contenant une contrainte critique.

Chacun des cercles est défini par:

L'abscisse de son centre $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$

Son rayon $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

Puisque ces cercles admettent une enveloppe $(\sigma_1; \sigma_3)$, ils doivent vérifier une équation de la forme $F(\sigma_1; \sigma_3) = 0$ qui représente la fonction charge

IV-4-2-Critère de Mohr-Coulomb

Le critère de plasticité appelé critère de Mohr-Coulomb ou de Mohr-Caquot s'applique parfaitement bien au cas des sols. Dans ce cas la courbe est assimilée à deux droites figure 7 d'équation :

$$\tau = c + \sigma \cdot \tan \varphi \quad (7)$$

τ : contrainte tangentielle

c : cohésion du sol (ayant la dimension d'une contrainte)

φ : angle de frottement interne

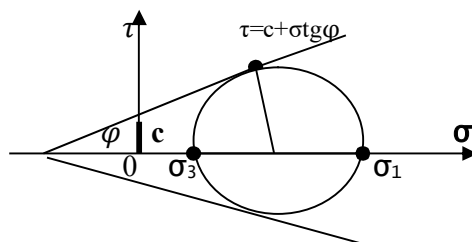


Fig 7 : droite intrinsèque

La relation (7) représente le critère de plasticité dans le plan de Mohr.

Dans le plan des contraintes principales, le critère découlant de la loi de coulomb s'écrit :

$$(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi - (\sigma_1 - \sigma_3) + 2c \cdot \cos \varphi = 0 \quad (8)$$

Qu'on peut mettre sous la forme

$$\sigma_1 - \sigma_3 \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} - 2c \frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi} \quad (9)$$

Les relations (7) , (8) et (9) sont obtenues à partir du cercle de Mohr

IV-5-3-Surface de charge

La surface limite associée au critère de Mohr est une pyramide, à six facettes, d'axe

$\Delta: (\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3)$ dont le sommet S a pour coordonnées $(-c.\cotg\varphi, -c.\cotg\varphi, -c.\cotg\varphi)$.

Chacune des six facettes est parallèle à l'un des axes de coordonnées $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$;

Dans ce repère la surface de charge à la forme suivante :

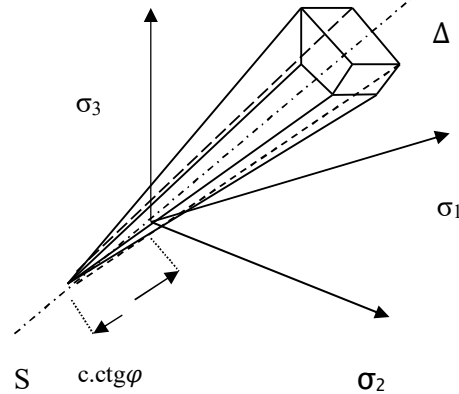


Fig 8. Surface de charge de Mohr dans l'espace des contraintes principales

Dans un repère déviatorique la surface de charge devient

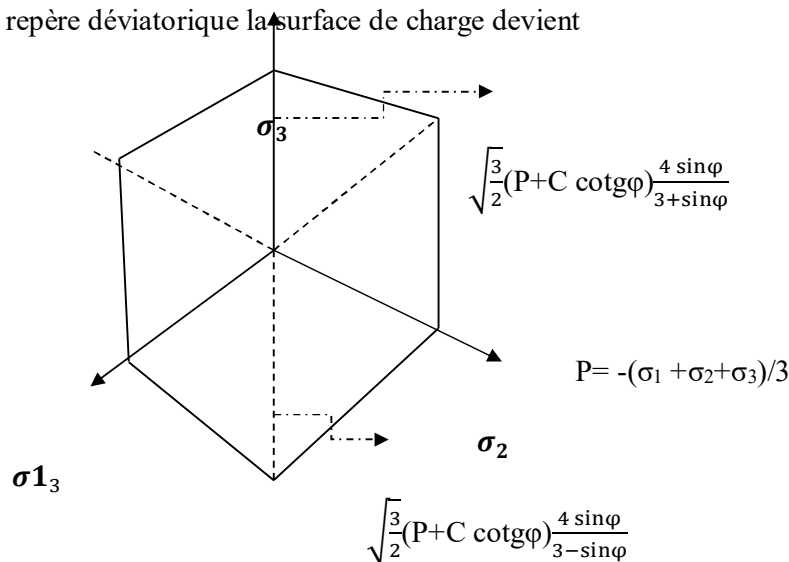


Fig 9 : Surface de charge dans le plan déviatorique

Dans un plan de Mohr, la surface de charge prend la forme de la figure 10

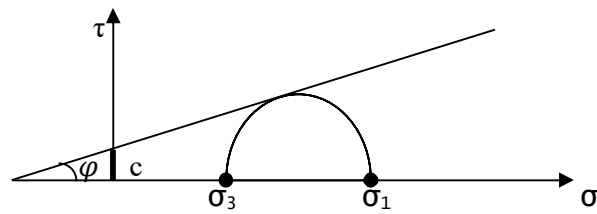


Fig10. Représentation du critère dans le plan de Mohr (σ, τ)

Le critère de Mohr est apparenté au critère de Tresca, on peut vérifier aisément que lorsqu'on a affaire à un matériau purement cohérent $C \neq 0$ et $\varphi=0$ nous obtenons le critère de Tresca.

On posant $\varphi = 0$ dans les équations (8 et 9) On obtient :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) - 2c = 0 \text{ qui correspond au critère de Tresca.}$$