CH-II- Forme des Critères de Plasticité (ou d'écoulement des matériaux)

1-Définition

En fonction des conditions de chargement, un matériau peut se trouver dans différents états mécaniques. Pour de petites forces extérieures le matériau travaille élastiquement, on dit qu'il est dans l'état élastique. Pour des forces plus grandes, il apparait des déformations permanentes, on dit que le matériau est dans l'état plastique. Au delà, il se forme des criques locales et intervient l'état de rupture.

L'état mécanique d'un matériau dépond en premier lieu de l'état de contraintes.

On définit un état de contrainte limite comme un état tel qu'il y a variation des propriétés du matériau c'est-à-dire passage d'un état mécanique à un autre.

L'état limite de contrainte peut être considéré comme **critère (ou critérium**) des propriétés de résistance du matériau.

Un critère de plasticité ou critère d'écoulement plastique, est un critère permettant de savoir, sous des sollicitations données, si une pièce se déforme plastiquent ou si elle reste dans le domaine élastique.

En résistance des matériaux, on désire toujours rester dans le domaine élastique, on parle donc parfois de **critère de résistance.**

Par exemple, dans le cas d'un état de contraintes planes : cas de traction uniaxiale d'une pièce d'un matériau ductile, la limite au-delà de laquelle on a une déformation plastique est la limite élastique ou limite d'écoulement notée **Re :** pour une traction simple chargée dans le sens x, on reste dans le domaine élastique si : $\boldsymbol{\sigma_x \leq}$ **Re**

En résistance des matériaux, on utilise la notion de **limite admissible** (ou contrainte admissible $\boldsymbol{\sigma_a}$ donnée par : $\boldsymbol{\sigma_a = \frac{Re}{Fs}}$

Le **critère de résistance** s'écrit alors : $\boldsymbol{\sigma_x \leq \frac{Re}{Fs}}$ **:**

Fs : étant un coefficient de sécurité.

II-Détermination du coefficient de sécurité.

La connaissance des propriétés mécaniques des matériaux et celles des sollicitations permet de fixer les dimensions des pièces de manière que la limite élastique ne soit jamais atteinte.

Toutes les règles de calcul exigent des contraintes sensiblement inferieures aux contraintes pour les quelles apparaissent des déformations irréversibles, nécessitant ainsi l'introduction d'un coefficient de sécurité noté **Fs.**

II-1-Etats de contraintes équidangereux

Si dans deux états de contraintes les coefficients de sécurité sont égaux, ces deux états sont dits également dangereux ou états de contraintes **équidangereux.**

Soit l'état de contrainte de la figure1A

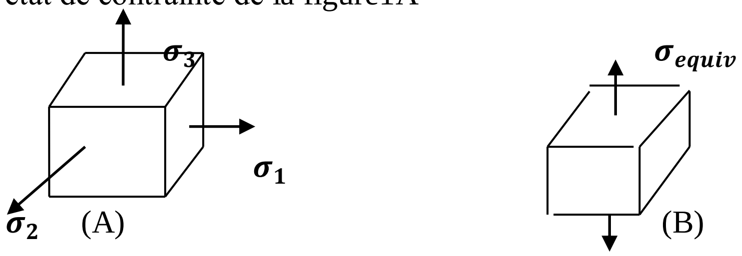

Fig.1 : états équidangereux

Lorsqu'on augmente proportionnellement ($\boldsymbol{\sigma_1, \sigma_2}$ ***et*** $\boldsymbol{\sigma_3}$**),** c'est-à-dire si l'on opère une homothétie, tôt ou tard l'état de contrainte finira par être limite. Dans ces conditions, le coefficient de sécurité sera donné par le facteur d'homothétie dont il vient d'être question.

Egalement on peut comparer des états de contraintes non seulement par le coefficient de sécurité mais au moyen de la caractéristique d'un état de contrainte pris comme **étalon.** Le plus simple est de prendre pour étalon la traction simple à **contrainte principale équivalente (ou de comparaison)** désignée par $\boldsymbol{\sigma_{equiv}}$ figure1B. Celle-ci étant fonction des contraintes de l'état réel, donc on peut écrire :

$$\sigma_{equiv} = f\,(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \qquad (1)$$

La contrainte équivalente $\boldsymbol{\sigma_{equiv}}$ est la contrainte qu'il faut créer dans une éprouvette tendue pour avoir le même degré de danger que l'état tridimensionnel donné.

Si $\boldsymbol{\sigma_{equiv}}$ est trouvée en fonction de σ_1, σ_2 *et* σ_3, on peut définir le coefficient de sécurité **Fs** en traction (état B) par la relation suivante.

$$\mathbf{Fs} = \frac{\mathbf{Re}}{\sigma_{\mathbf{equiv}}} \qquad \mathbf{(2).}$$

Re : étant la limite élastique du matériau

Le coefficient de sécurité de l'état B ainsi calculé est aussi le coefficient de sécurité de l'état A.

II-2-Calcul de la contrainte équivalente ou de comparaison en fonction de $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

Lors du chargement d'un corps, des déformations par glissement dues au cisaillement apparaissent, on peut dans ces conditions prendre pour critère de passage de l'état élastique à l'état plastique la contrainte tangentielle maximale au point considéré.

Cette idée conduit à l'hypothèse sur les contraintes tangentielles maximales. Ainsi deux états de contraintes sont dits équidangereux s'il y a égalité des contraintes tangentielles maximales.

Traçons le cercle de Mohr pour les deux états A et B.

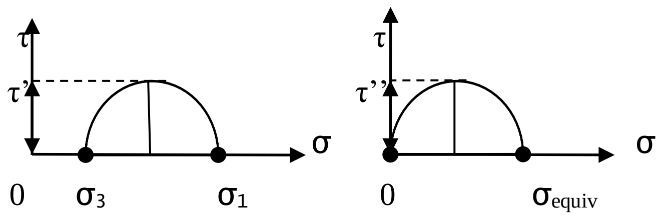

Fig 2 : cercle de Mohr pour états de contraintes équidangereux

Comme les états A et B doivent être équidangereux cela conduit à l'égalité des contraintes de cisaillement/

τ'=τ'' qu'on peut exprimer à partir des deux cercles, ainsi on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} \tau' = \dfrac{\sigma 1 - \sigma 3}{2} \\[2ex] \tau'' = \dfrac{\sigma equiv}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \sigma_{equiv} = \sigma_1 - \sigma_3 \qquad (3)$$

contrainte équivalente

La relation (1) devient alors:

$$\mathbf{Fs} = \frac{Re}{\sigma_1 - \sigma_3} \qquad (4)$$

La relation (4) ainsi obtenue représente le coefficient de sécurité

On voit que le passage d'un état élastique à un état plastique est déterminé par les contraintes principales maximum et minimum.

III--Critères de plastification ou d'écoulement plastique

III-1-Critère de la contrainte normale

Lorsque l'une des contraintes principales $(\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3)$ atteint la limite élastique en compression simple ou en traction simple.

Si $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \geq 0$, il y a écoulement en traction simple si $\sigma_1 = Re$

Si 0 $\geq \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, il écoulement en compression simple si $|\sigma_3| = R'e$

III-2-Critère de la contrainte tangentielle

Lorsqu'il y a cisaillement simple, le critère s'écrit $\tau = \frac{Re}{2}$

III-3-Critère de la déformation maximale

Ce critère porte sur les déformations. Il ya écoulement lorsque l'une des deux conditions suivantes est remplie :

$$\varepsilon_1 = \frac{Re}{E} \quad \textbf{ou} \quad \varepsilon_3 = \frac{Re}{E}$$

III-4-Critère énergétique

L'énergie potentielle de déformation peut être également retenue comme critère, mais on ne considérant que l'énergie potentielle de déformation de forme $U_{o,f}$.

En écrivant que l'énergie potentielle de l'état A est égale à celle de l'état B c'est-à-dire $U_{o,fA} = U_{o,fB}$,(voir cours d'élasticité), on aboutit à :

$$\sigma_{equiv} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma 1 - \sigma 2)^2 + (\sigma 2 - \sigma 3)^2 + (\sigma 3 - \sigma 1)^2}$$