INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Pr. K. DJEGHABA
Département de Génie Civil
Faculté des sciences de l'ingénieur
Université Badji Mokhtar-Annaba

Mars 2018

Chapitre II

1-Formulation Intégrale, 2-Approximation, Interpolation, 3-Discrétisation

Partie 2:

Approximation et Interpolation

I- Approximation du Champ de déplacement :

I-1- Introduction :

I-2- Restriction et interpolation

Comme cela a été vue précédemment, L'expression de W (P.T.V) nécessite donc la construction d'un champ de déplacement cinématiquement admissible (CA) : continue et vérifiant les conditions aux limites sur "Su"

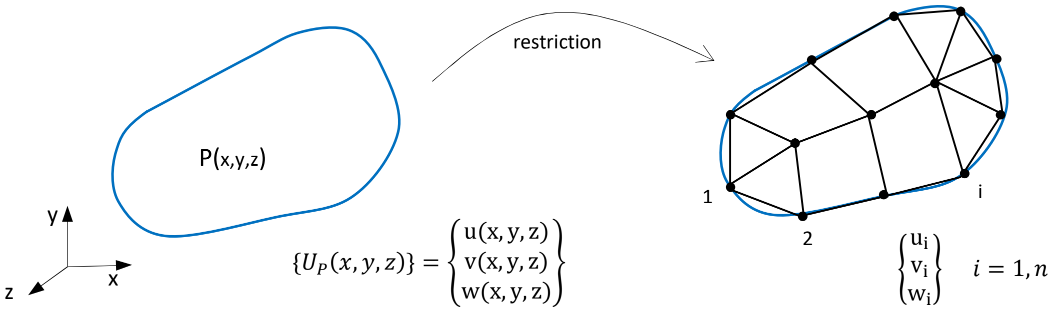
Le champ de déplacement est représenté par :

$\{U(X)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix}$ défini sur le volume V

Dans la méthode des éléments finis (MEF), il s'agit de construire un champ de déplacement mais approximé à partir de valeurs de ce champ de déplacement en des points choisis sur le volume V.

En d'autres termes , le MEF consiste donc à :

- dans un premier temps, à restreindre la connaissance du champ de déplacement $\begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix}$ défini sur le volume V, à seulement la connaissance de ses valeurs en "n" points appelés nœuds tel que qu'au point "i" le déplacement est $\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}$ i=1,n avec n nombre de points



champ de déplacement réel

vecteur de déplacement aux nœuds

- En second lieu, a trouver un champ de déplacement approximé et noté $\{\overline{U}\ (x,y,z)\}$ défini après interpolation entre les valeurs de ce déplacement aux points nodaux par des fonctions notées [N(x,y,z)] et appelée fonctions d'interpolations.

  (Cette fonction est essentielle dans la méthode des élément finis , elle fera l'objet d'un développement détaillée dans ce qui suit)

  ainsi :

$$\{U(x,y,z)\} \; - - - - - - - \rightarrow \; \{\overline{U}\ (x,y,z)\} = [N(x,y,z)] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \qquad \text{i=1,n}$$

Remarque 1: Il apparait que dorénavant, les inconnus de notre problème seront les déplacements aux nœuds (résolution d'un problème discret) et non plus les déplacement réel (résolution d'un problème continu)

Remarque 2: le champ de déplacement $\{\overline{U}\ (x,y,z)\}$ est donc une expression approchée du champ réel $\{U(x,y,z)\}$. Il apparait donc, que les valeurs de $\{\overline{U}\ (x,y,z)\}$ convergeront d'autant plus vers $\{\ U(x,y,z)\}$ que l'interpolation est élevée, ce qui équivaut à un choix élevé du nombre de nœuds.

3- Approximation du champ de déplacement

Il s'agit d'exprimer le champ de déplacement sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions $F_i(x,y,z)$ connues et indépendantes (qui sont souvent des monômes). le choix de ces fonctions est essentiel en éléments finis et détermine la qualité de l'élément construit.

ainsi , soit à approximer le champ de déplacement $U(x,u,z)$,

celui ci s'écrira :

$$\overline{U}\,(x,y,z) = [F_1(x\,,y,z) \;\; F_2(x,y,z) \ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots. \;\; F_n(x,y,z)]\begin{Bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{Bmatrix}$$

ou l'ensemble de ces fonctions :

$$[\boldsymbol{F_1(x\,,y,z)} \;\; \boldsymbol{F_2(x,y,z)} \ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots. \;\; \boldsymbol{F_n(x,y,z)}]$$

est appelé **"Base Polynomiale de l'approximation"**

les constantes α_i sont déterminer selon les conditions de l'élément et du choix de repère.

4- Méthodes d'approximation de fonctions:

Deux principales approches sont utilisées :

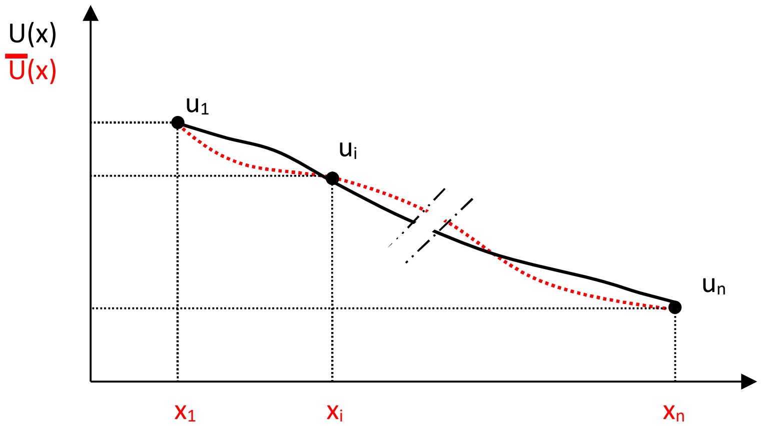
- L'approximation utilisant seulement les valeurs de la fonction à interpoler est appelée approximation **lagrangienn**e (ou de type LAGRANGE). Généralement utilisée pour les éléments travaillant en mode de déformation de traction-compression ou de membrane
- Lorsque en plus des valeurs de la fonction à interpoler, on utilise aussi ses dérivées jusqu'à l'ordre m, l'approximation est appelée **hermitienne** (ou de Type HERMITE), Utilisé pour les éléments travaillants par exemple en mode déformation de flexion (faisant intervenir les rotations).

  Remarque: dans le cadre de ce cours nous nous limiterons aux éléments les plus utilisés avec m=1 (considérer seulement la 1er dérivé de la fonction)

  de plus nous nous limiterons dans ce cours au modèle "déplacement" en élément finis, ou la fonction à interpoler est le champ de déplacement : $\{U(x,y,z)\}$

4-1 Champs de déplacement des Eléments finis pour les problèmes Unidimensionnels (1D)

4-1-1 Approximation lagrangienne (à partir des valeurs de la fonction à interpoler)



soit à approximer la fonction de champ de déplacement $U(x)$ à partir de ses valeurs en x_i

nous notons par u_i les valeurs de cette fonction en "n" points d'abscisse x_i alors :

$$U(x_i) = u_i$$
i=1,n

nous approximons cette fonction par un polynôme $\overline{U}\ (x)$ de degrés (n-1) composé de "n" monômes de la base polynomiale) à une variable (arrangée selon l'ordre de degré croissant) :

Remarque : le nombre de monôme pris de la base polynomiale est égale au nombre de point de l'interpolation.

La base polynomiale dans le cas 1D s'écrit :

$$[1\ \ x\ \ x^2\ x^3 \dots\dots\dots . x^{n-1}]$$

ainsi

$$\overline{U}\ (x) = [1\ \ x\ \ x^2\ x^3 \dots\dots\dots . x^{n-1}] \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{Bmatrix}$$

puisque en chaque "i" (i=1 à n) nous avons :

$$\overline{U}\ (x_i) = u_i = \left[1\ \ x_i\ \ x_i^2\ x_i^3 \dots\dots\dots . x_i^{n-1}\right] \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{Bmatrix}$$

nous obtenons un système d'équation dont la résolution nous donne les valeurs des constantes α_i en fonction des u_i

avec les valeurs de α_i connues, on réécrit finalement $\overline{U}(x)$ en fonction des u_i telle que :

$$\overline{U}(x) = N_1(x)\ u_1 + N_2(x)\ u_2 + \cdots + N_n(x)\ u_n = \sum_{i=1}^{n} N_i(x).\ u_i$$

Et on en déduit les fonctions d'interpolation : Ni(x)

nous obtenons donc une approximations $\overline{U}(x)$ de $U(x)$ a partir des valeurs $\mathbf{u_i}$ et de fonctions d'interpolations de degrés (n-1) notées **Ni(x)** et appelées : <u>**Fonctions de Formes.**</u>

cette expression peut s'écrire aussi matriciellement comme **:**

$$\overline{U}(x) = [N].\{q\}$$

avec {q} : le vecteur déplacement nodaux {q} est composé des $\mathbf{u_i}$

$[N]$: et la matrice des fonctions de formes composée des fonctions de forme de $N_i(x)$

<u>**Propriétés de la fonction de forme N_i**</u>

la fonction de forme $N_i(x)$ est donc liée au ddl u_i, ainsi et sachant que :

$$\overline{U}(x_i) = u_i$$
i=1,n

qui s'écrit aussi en fonctions de N_i :

$$\overline{U}(x_i) = N_1(x_1).\ u_1 + \ N_2(x_2).\ u_2 + \cdots + \boldsymbol{N_i(x_i).\ u_i} + \cdots N_n(x_n).\ u_n = u_i$$

ceci implique donc que $\begin{cases} \boldsymbol{N_i(x_i) = 1} \\ \boldsymbol{N_j(x_j) = 0}\ ,\ \ \boldsymbol{j = 1, n\ (sauf\ j = i)} \\ \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} N_i(x\quad) = 1} \end{cases}$

4-1-2 -Détermination des fonctions de Formes $N_i(x)$

- 1er Méthode

De manière générale et comme on vient de le voir, il suffit pour trouver les N_i , de résoudre le système composé du polynôme évalué aux "n" points x_i

ainsi, en chaque "i"

$$\bar{U}\,(x_i) = [1 \;\; x_i \;\; {x_i}^2 \; {x_i}^3 \; \dots \dots \dots . {x_i}^{n-1}] \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{Bmatrix} = u_i \quad \text{i=1,n}$$

on obtient ainsi un système à "n" équations)

la résolution de ce système permet de calculer les α_i en fonction des u_i et ainsi de réécrire $\bar{U}(x)$ et finalement d'en tirer le N_i par identification tel que :

$$\bar{U}(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x).u_i$$

- 2eme Méthode

Dans le cas 1, les fonctions de formes N_i pour un nombre de points donnée "i" peut être effectué simplement et directement en utilisant le **polynôme de Lagrange** tel que

$$N_i(x) = \prod_{j=1,n \;\; (j \neq i)}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- 3eme Méthode :

une troisième méthode permet de trouver les N_i en sachant que puisque $\bar{U}(x)$ est de degrés (n-1) avec "n" points d'interpolation, cette approximation est donc capable d'approximer de façon exacte tous les polynômes de degrés inferieur ou égal à (≤) (n-1).

ainsi soit le polynôme de degrés "k" ---> x^k avec k=[0, n-1] , si N_i sont les fonctions d'interpolation, alors on peut écrire que :

$$\sum_{i=1}^{n} N_i(x).x_i^k = x^k$$

ou plus détaillé :

$$\begin{cases} k = 0 \;\rightarrow\; N_1(x).x_1^0 + N_2(x).x_2^0 + \cdots + N_i(x).x_i^0 + \cdots N_n(x).x_n^0 = x^0 = 1 \\ k = 1 \;\rightarrow\; N_1(x).x_1^1 + N_2(x).x_2^1 + \cdots + N_i(x).x_i^1 + \cdots N_n(x).x_n^1 = x^1 = x \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots .. \\ k = n-1 \;\rightarrow\; N_1(x).x_1^{n-1} + N_2(x).x_2^{n-1} + \cdots + N_i(x).x_i^{n-1} + \cdots N_n(x).x_n^{n-1} = x^{n-1} \end{cases}$$

Réécrit sous forme matricielle

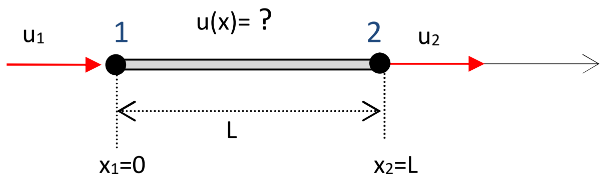
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ \\ \\ N_n(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \\ \\ x^{n-1} \end{Bmatrix}.$$

la résolution de ce système nous donne donc les fonctions de formes

<u>4-1-3 - Application pour des Eléments finis en 1D</u>

- **<u>Application à l'élément barre à 2 nœuds :</u>**

soit l'élément de barre à 2 nœuds placé dans le système d'axe "x", nous cherchons ses fonctions de formes ?.



<u>1^{er} Méthode : (résolution du polynôme) :</u>

$$\bar{U}\,(x) = [1\;\; x\;\; x^2\; x^3 \dots \dots \dots .\, x^{n-1}] \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix}$$

puisque l'élément de barre à 2 nœuds et 2 ddl au total , le polynôme sera composé de 2 monômes:

$$\bar{U}\,(x) = [1\;\; x\,] \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \alpha_0 + \alpha_1 . x$$

$$en\; x = x_1 = 0 \quad \rightarrow \bar{U}\,(x) = u_1 = \alpha_0$$

$$en\; x = x_2 = L \quad \rightarrow \bar{U}\,(x) = u_2 = \alpha_0 + \alpha_1 L$$

ce qui donne

$$\alpha_0 = u_1 \qquad et \quad \alpha_1 = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

$$\bar{U}\,(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} . x = \; N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2$$

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}\;; \qquad N_2(x) = \frac{x}{L}$$

ainsi la matrice des fonctions de forme de l'élément barre à 2 nœuds est :

$$[N(x)] = [N_1(x) \quad N_2(x)]$$

2^{eme} Méthode : (polynôme de Lagrange) :

$$N_i(x) = \prod_{j=1,n \quad (j \neq i)}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

application directe avec n= 2 : nombre de point et avec $x_i = 0$ et $x_2 = L$

$$N_1(x) = \prod_{j=1,2 \quad (j \neq 1)}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - L}{-L} = 1 - \frac{x}{L}$$

$$N_2(x) = \prod_{j=1,2 \quad (j \neq 2)}^{2} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x}{L}$$

3^{eme} Méthode : (directe)

application avec n= 2 : nombre de point et avec $x_i = 0$ et $x_2 = L$
le degré max du polynôme à interpoler est k=n-1 = 2-1 =1
ainsi :
pour k=0 >> $\sum_{i=1}^{2} N_i(x).x_i^0 = N_1(x).x_1^0 + N_2(x).x_2^0 = x^0 = 1$

$$\boldsymbol{N_1(x) + N_2(x) = 1}$$

pour k=1 >> $\sum_{i=1}^{2} N_i(x).x_i^1 = N_1(x).x_1^1 + N_2(x).x_2^1 = x^1 = x$

$$\boldsymbol{N_2(x).L = x}$$

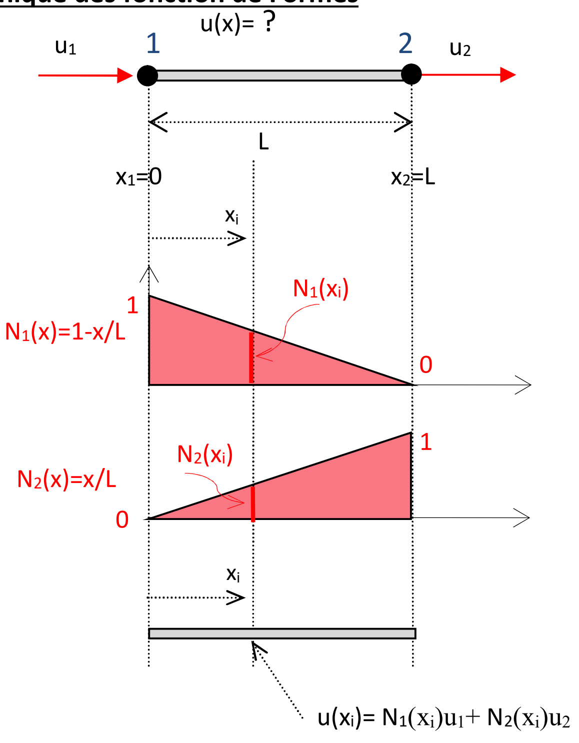
qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix}$$

la résolution de ce système nous donne :

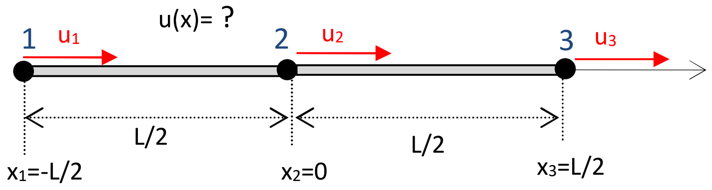
$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \; ; \qquad N_2(x) = \frac{x}{L}$$

<u>Représentation graphique des fonction de Formes</u>



Application à l'élément barre à 3 nœuds :

soit l'élément de barre à 3 nœuds placé dans le système d'axe "x", nous cherchons ses fonctions de formes ?



1[er] Méthode : (résolution du polynôme) :

l'élément de barre a 3 nœuds et 3 ddl au total , le polynôme sera composé de 3 monômes:

$$\bar{U}\,(x) = [1 \;\; x \;\; x^2]\begin{Bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{Bmatrix} = \alpha_0 + \alpha_1.x + \alpha_2.x^2$$

$$en\; x = x_1 = -\frac{L}{2} \;\; \rightarrow \bar{U}\,(x) = u_1 = \alpha_0 + \alpha_1.(-\frac{L}{2}) + \alpha_2.(-\frac{L}{2})^2$$

$$en\; x = x_2 = 0 \;\; \rightarrow \bar{U}\,(x) = u_2 = \alpha_0$$

$$en\; x = x_3 = \frac{L}{2} \;\; \rightarrow \bar{U}\,(x) = u_3 = \alpha_0 + \alpha_1.(\frac{L}{2}) + \alpha_2.(\frac{L}{2})^2$$

ce qui donne

$$\alpha_0 = u_2\,, \qquad \alpha_1 = \frac{u_3 - u_1}{L} \qquad et \quad \alpha_2 = \frac{2(u_1 - 2u_2 + u_3)}{L^2}$$

$$\bar{U}\,(x) = u_2 + \frac{u_3 - u_1}{L}.x + \frac{2(u_1 - 2u_2 + u_3)}{L^2}x^2 = N_1(x)\,.u_1 + N_2(x)\,.u_2 + N_3(x)\,.u_3$$

$$N_1(x) = -\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}\;; \quad N_2(x) = 1 - \frac{4x^2}{L^2}\;; \quad N_3(x) = \frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}$$

2[eme] Méthode : (polynôme de Lagrange) :

$$N_i(x) = \prod_{j=1,n \;\; (j \neq i)}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

application directe avec n= 3 :nombre de point et avec $x_1 = -L/2$; $x_2 = 0$ et $x_3 = L/2$

$$N_1(x) = \prod_{j=1,3 \;\; (j \neq 1)}^{3} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\,\frac{x - x_3}{x_1 - x_3} = \frac{x - 0}{-L/2 - 0}\,\frac{x - L/2}{-L/2 - L/2} = -\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}$$

$$N_2(x) = \prod_{j=1,3 \;\; (j \neq 2)}^{3} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,\frac{x - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{x - (-\frac{L}{2})}{0 - (-\frac{L}{2})}\,\frac{x - (\frac{L}{2})}{0 - (\frac{L}{2})} = 1 - \frac{4x^2}{L^2}$$

$$N_3(x) = \prod_{j=1,3\ \ (j\neq 3)}^{3} \frac{x - x_j}{x_3 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1}\,\frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{x - (-\frac{L}{2})}{0 - (-\frac{L}{2})}\,\frac{x - 0}{\frac{L}{2} - 0} = \frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}$$

3eme Méthode : (directe)

application avec n= 3 :nombre de point et avec $x_1 = -L/2$; $x_2 = 0$ et $x_3 = L/2$
le degré max du polynôme à interpoler est k=n-1 = 3-1 =1
ainsi :
pour k=0 >> $\sum_{i=1}^{3} N_i(x).x_i^0 = N_1(x).x_1^0 + N_2(x).x_2^0 + N_3(x).x_3^0 = x^0 = 1$

$$\boldsymbol{N_1(x) + N_2(x) + N_3(x) = 1}$$

pour k=1 >> $\sum_{i=1}^{3} N_i(x).x_i^1 = N_1(x).x_1^1 + N_2(x).x_2^1 + N_3(x).x_3^1 = x^1 = x$

$$\boldsymbol{N_1(x)(-\frac{L}{2}) + N_3(x)(\frac{L}{2}) = x}$$

pour k=1 >> $\sum_{i=1}^{3} N_i(x).x_i^1 = N_1(x).x_1^2 + N_2(x).x_2^2 + N_3(x).x_3^2 = x^2$

$$\boldsymbol{N_1(x)(-\frac{L}{2})^2 + N_3(x)(\frac{L}{2})^2 = x^2}$$

qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -(\frac{L}{2}) & 0 & (\frac{L}{2}) \\ -(\frac{L}{2})^2 & 0 & (\frac{L}{2})^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{Bmatrix}$$

la résolution de ce système nous donne :

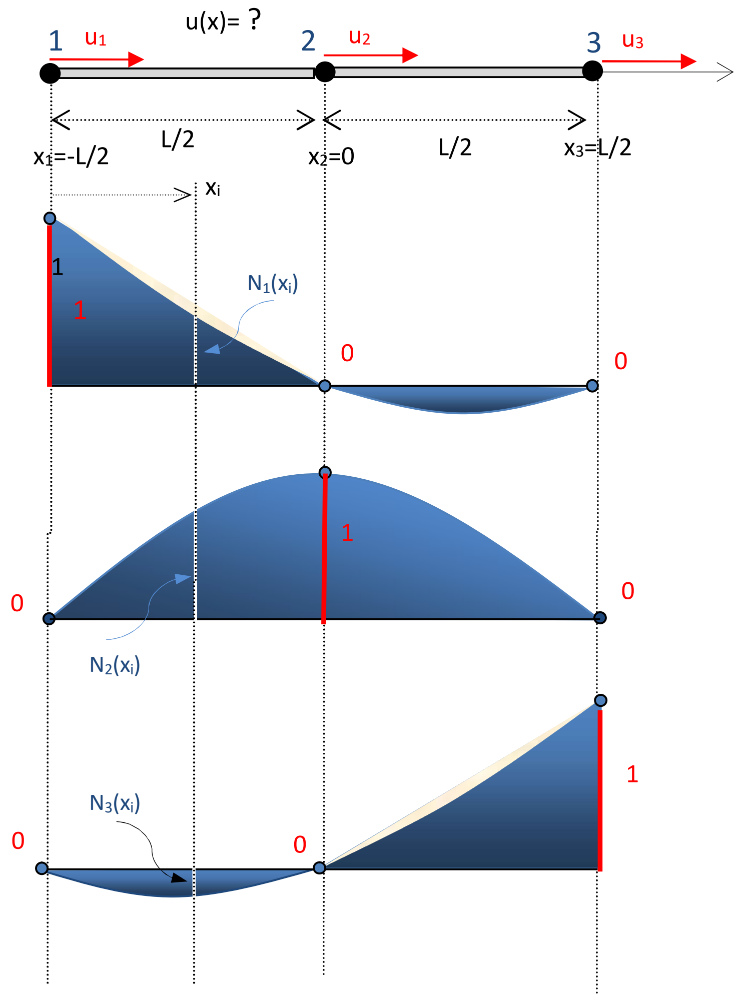
$$\begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -(\frac{L}{2}) & 0 & (\frac{L}{2}) \\ -(\frac{L}{2})^2 & 0 & (\frac{L}{2})^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(\frac{1}{L}) & 2/(L)^2 \\ 1 & 0 & -4/(L)^2 \\ 0 & (\frac{1}{L}) & 2/(L)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{Bmatrix}$$

$$N_1(x) = -\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}\ ; \quad N_2(x) = 1 - \frac{4x^2}{L^2}\ ; \quad N_3(x) = \frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}$$

ainsi la matrice des fonctions de forme de l'élément barre à 3 nœuds est :

$$[N(x)] = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x)]$$

<u>Représentation graphique des fonction de Formes</u>



$$N_1(x) = -\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}$$

$$N_2(x) = 1 - \frac{4x^2}{L^2}$$

$$N_3(x) = \frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}$$

4-1-2 Approximation Hermitienne :(à partir des valeurs de la fonction à interpoler et de sa 1er dérivée)

soit à approximer la fonction de champ de déplacement $V(x)$ à partir de ses valeurs et de ses dérivées en x_i

<u>nous notons par v_i et $\frac{\partial v_i}{\partial x}$ les valeurs de cette fonction et de ses dérivées en "n" points d'abscisse x_i</u> alors :

$$V(x_i) = v_i$$
$$\frac{\partial V(x_i)}{\partial x} = v_i{}'$$
$$i=1,n$$

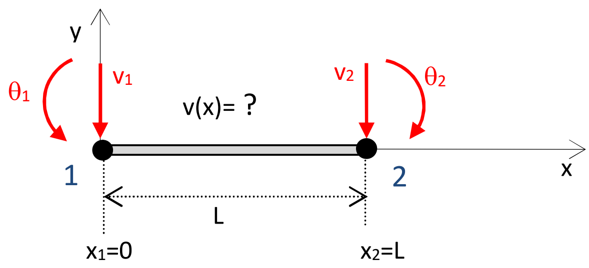
nous approximons donc cette fonction par un polynôme $\bar{V}(x)$ de degrés (2n-1) composé de "2n" monômes de la base polynomiale .
les méthode d'approximation restent les même que pour l'approximation lagrangienne.

Application à l'élément Poutre en flexion à 2 nœuds :(pour simplifier, nous n'utiliserons que la 1er méthode :résolution du polynôme)

soit un élément de poutre à 2 nœuds placé dans le système d'axe "x". le mode de déformation de flexion provoque un déplacement de flexion transversal $V(x)$. Dans le cas de poutre avec effet de flexion dominant (poutre de bernoulli) et effet de cisaillement négligeable (cas d'une hauteur faible de la poutre par rapport à sa longueur), la rotation en un point de la poutre peut être assimilée dans ce cas à la dérivé de la flèche. $V(x)$.

Ainsi, on peut considérer deux ddl en chaque nœuds de l'élément : le déplacement et la rotation, tel que le vecteur déplacement nodale se présente comme :

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \left(\dfrac{dv}{dx}\right)_1 \\ v_2 \\ \left(\dfrac{dv}{dx}\right)_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$



1er Méthode : (résolution du polynôme) :

$$\bar{V}\,(x) = [1\ \ x\ \ x^2\ x^3 \dots\dots\dots . x^{n-1}]\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix}$$

l'élément de poutre a 2 nœuds et 4 ddl au total (n=4) , le polynôme sera composé de 4 monômes: le déplacement V(x) sera interpolé par ses 4 valeurs en 1 et 2 (sa valeur et la valeur de sa dérivée)

$$\bar{V}\,(x) = [1\ \ x\ \ x^2\ x^3\,]\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 . x^2 + \alpha_3 x^3$$

$$\frac{\partial \bar{V}(x)}{\partial x} = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2$$

$$en\ x = x_1 = 0 \quad \rightarrow\ \bar{V}\,(x_1) = \bar{V}\,(0) = v_1 = \alpha_0$$

$$\rightarrow\ \frac{\partial \bar{V}(x_1)}{\partial x} = \frac{\partial \bar{V}(0)}{\partial x} = \theta_1 = \alpha_1$$

$$en\ x = x_2 = L \quad \rightarrow \bar{V}\ (x_2) = \bar{V}\ (L) = v_2 = \alpha_0 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \alpha_3 L^3$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial \bar{V}(x_2)}{\partial x} = \frac{\partial \bar{V}(L)}{\partial x} = \theta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 L + 3\alpha_3 L^2$$

la résolution de ce système d 'équation donne :

$$\alpha_0 = v_1\ ; \qquad \alpha_1 = \theta_1\ ; \qquad \alpha_2 = -\frac{3v_1}{L^2} + \frac{3v_2}{L^2} - \frac{2\theta_1}{L} - \frac{\theta_2}{L} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{2v_1}{L^3} - \frac{2v_2}{L^3} + \frac{\theta_1}{L^2} + \frac{\theta_2}{L^2}$$

ainsi $$\bar{V}\ (x) = v_1 + \theta_1 x + \left(-\frac{3v_1}{L^2} + \frac{3v_2}{L^2} - \frac{2\theta_1}{L} - \frac{\theta_2}{L}\right)x^2 + \left(\frac{2v_1}{L^3} - \frac{2v_2}{L^3} + \frac{\theta_1}{L^2} + \frac{\theta_2}{L^2}\right)x^3$$

qui s 'écrit sous la forme $$\bar{V}\ (x) = N_1(x).v_1 + N_2(x).\theta_1 + N_3(x).v_2 + N_4(x).\theta_2$$

$$avec \quad N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}; \quad N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}; \quad N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}; \quad N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

ainsi la matrice des fonctions de forme de l'élément poutre en flexion à 2 nœuds est :

$$[N(x)] = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)]$$

avec $\{q\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$ finalement : $\bar{V}\ (x) = [N(x)].\{q\}$

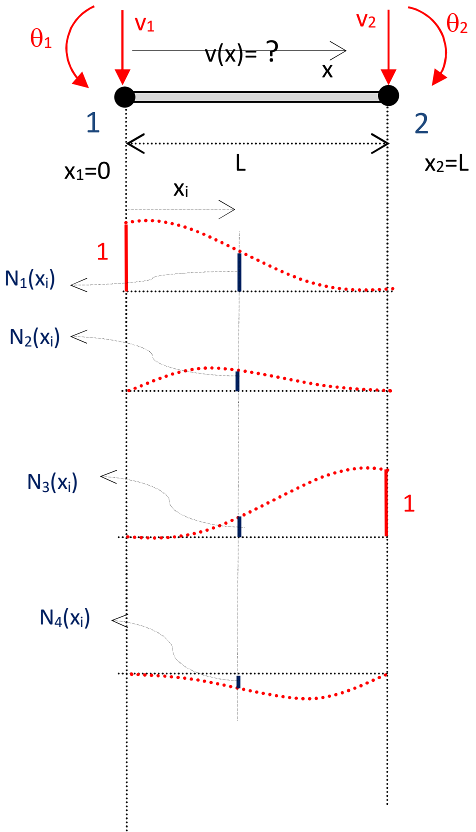
<u>Représentation graphique des fonction de Formes de l'élément poutre en flexion</u>

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$



ainsi , le déplacement en xi s'écrit :

$$\bar{V}\ (x_i) = N_1(x_i).v_1 + N_2(x_i).\theta_1 + N_3(x_i).v_2 + N_4(x_i).\theta_2$$

4-2 Eléments finis pour les problèmes Plans (Bidimensionnels (2D) ou à deux variables :

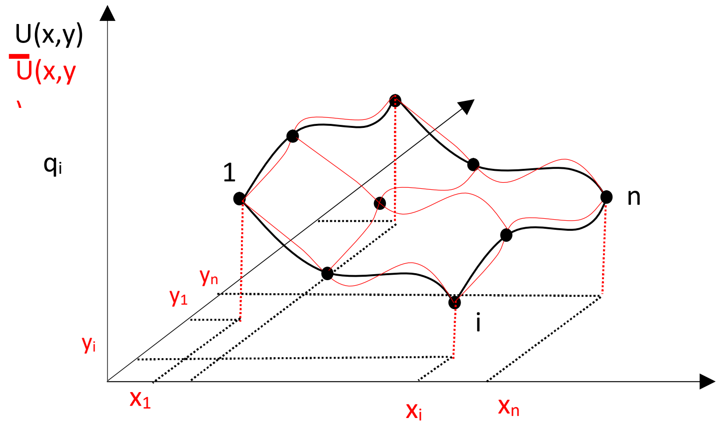
4-2-1 Approximation lagrangienne.

La procédure est la même que pour le cas (1D), seule la base polynomiale change.

Ainsi, soit à approximer pour un problème Plan la fonction de champ de déplacement

$$u(x,y)$$

à partir de ses valeurs en «n » points (x_i, y_i) notés u_i (i=1,n)



L'interpolation s'écrit pour

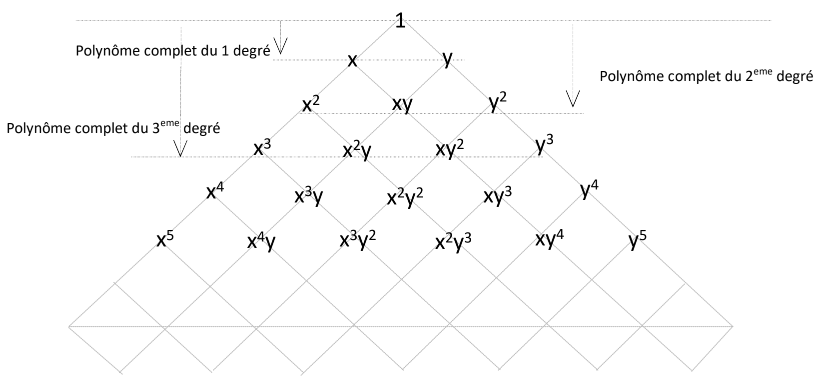
$$u(x_i, y_i) = u_i$$

i=1,n

nous approximons cette fonction par un polynôme $\bar{u}\,(x,y)$ composé de "n" monômes de la base polynomiale <u>à deux variables</u> (ordonnée par degré croissant):

$$F(x,y) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad xy^2 \quad x^2y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$$

Qu'on peut aussi retrouver en utilisant le triangle de pascal :



ainsi

$$\bar{u}\,(x,y) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2\, x^3 \quad x^2y \quad xy^2\, y^3 \ldots\ldots\ldots\ldots] \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \\ \cdot \\ \alpha_{n-1} \end{Bmatrix}$$

puisque en chaque "i" nous avons

$$u(x_i, y_i) = \bar{u}\,(x_i, y_i) = u_i =$$

$$[1 \quad x_i \quad y_i \quad x_i{}^2 \quad x_iy_i \quad y_i{}^2\, x_i{}^3 \quad x_i{}^2y_i \quad x_iy_i{}^2\, y_i{}^3 \ldots\ldots\ldots\ldots] \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{Bmatrix}$$

nous obtenons un système d'équation dont la résolution nous donne les valeurs des constantes α_i en fonction des u_i

ce qui nous permet de réécrire finalement en fonction des u_i l'approximation comme :

$$\bar{u}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x,y).u_i$$

Et donc d'en déduire les fonctions de formes : Ni(x,y)

Ou matriciellement comme **:**

$$u\,(x,y) = [N(x,y)]\{q\}$$

avec $[N(x,y)] = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_i \quad \dots \quad N_n]$ $\quad et \quad$ $\{q\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \\ u_i \\ \\ u_n \end{Bmatrix}$

<u>Détermination des fonctions de Formes $N_i(x,y)$</u>

Les méthodes de détermination des fonctions de formes restent les même que pour le cas 1D,

Nous nous limiterons dans la présentation à la 1ère méthode exposée (celle du polynôme de Lagrange n'étant applicable qu'au cas 1D)

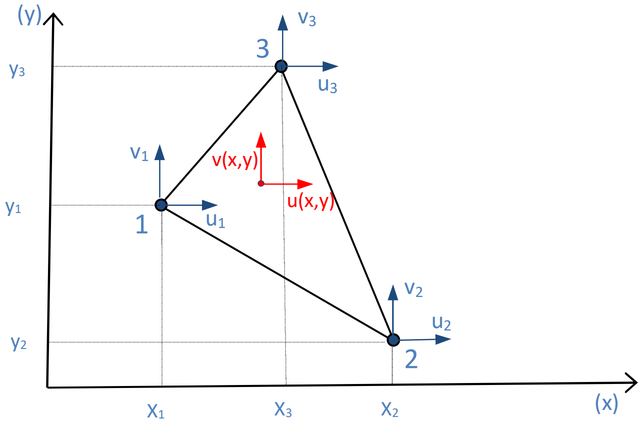
<u>Application aux éléments plans</u>

Les éléments utilisés généralement dans les problèmes Plans sont les éléments triangulaires (3 et 6 nœuds), rectangulaires (4 et 8 nœuds) Nous présentons dans ce qui suit le développement des matrices des fonctions de Formes des deux éléments simple de membrane : le triangle à 3 nœuds et le rectangle à 4 nœuds

<u>1-Elément Triangulaire de membrane à 3 nœuds.</u>

Le champ de déplacement dans ce cas s'écrit dans le repère global (x,y):

$\{U(x,y)\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$



Le mode de déformation pour ce type d'élément est plan en traction/compression ou plus généralement noté élément de membrane (ou membranaire)

Les champs de déplacements selon x : u(x,y) et selon y : v(x,y) seront interpolés avec les mêmes fonctions avec 3 valeurs nodales.

Ainsi le champ de déplacement selon x , $u\,(x,y)$ s'écrit :

$$u\,(x,y) = [N_i(x,y)]\{u_i\} = [N_1(x,y) \quad N_2(x,y) \quad N_3(x,y)]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

le champ de déplacement selon y $v\,(x,y)$ s'écrit :

$$v\,(x,y) = [N_i(x,y)]\{v_i\} = [N_1(x,y) \quad N_2(x,y) \quad N_3(x,y)]\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

<u>Interpolation de u(x,y) et détermination des $N_i(x,y)$:</u>

puisque la fonction u(x,y) est interpolée par 3 valeurs u_i , nous prenons les trois premier monômes de la base polynomiale en (x,y).

$$F(x,y) = [1 \quad x \quad y]$$

$$u\,(x,y) = [1 \quad x \quad y]\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$$

Nous notons que dans ce cas l'interpolation est **<u>linéaire</u>** en x et y (le polynôme est complet du 1er degré)

l'élément triangulaire a 3 nœuds et 1 ddl u /noeud:

$$au\ noeud\ 1 \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow\ u(x_1,y_1) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 = u_1$$

$$au\ noeud\ 2 \quad \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow\ u(x_2,y_2) = \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 = u_2$$

$$au\ noeud\ 3 \quad \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow\ u(x_3,y_3) = \alpha_0 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3 = u_3$$

Ce système d'équation écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_1y_3 - x_3y_1 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_1y_2 - x_2y_1$$

Remarque : on peut démontrer que l'aire du triangle notée A est tel que : $A = \frac{\Delta}{2}$

Ainsi ;

$$u(x,y) = [1 \quad x \quad y]\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

L'interpolation de u (x,y) s'écrit en fonction des fonctions de Formes

$$u\ (x,y) = [N_1(x,y) \quad N_2(x,y) \quad N_3(x,y)]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Et donc :

$$[N_1(x,y) \quad N_2(x,y) \quad N_3(x,y)] = \ [1 \quad x \quad y]\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & y_2 & y_2 \\ 1 & y_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$[N_1(x,y) \quad N_2(x,y) \quad N_3(x,y)] = \ [1 \quad x \quad y]\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_1y_3 - x_3y_1 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

Finalement :

$$N_1(x,y) = \frac{1}{2A}[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$N_2(x,y) = \frac{1}{2A}[(x_1y_3 - x_3y_1) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

$$N_3(x,y) = \frac{1}{2A}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

Remarque : l'interpolation de v(x,y) se fait avec les mêmes fonctions de Formes

Le champ de déplacement de notre élément est donc

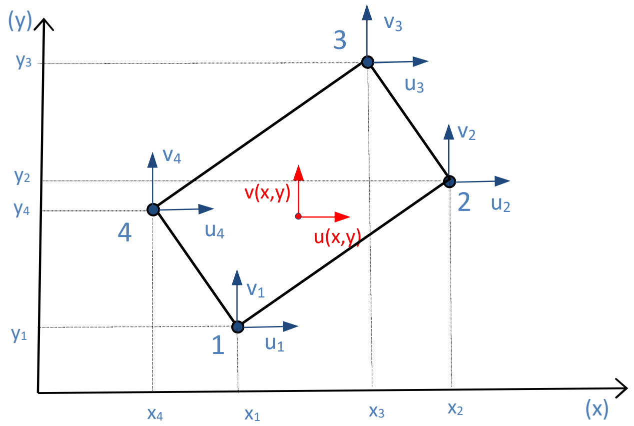
$$\{U(x,y)\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = [N(x,y)]\{q\}$$

Avec $\underline{[N(x,y)]}$: <u>fonction de forme de l'élément triangulaire de membrane</u> à trois nœuds et $\{q\}$ vecteur déplacement nodaux (réarrangé dans l'ordre des numéros des nœuds) :

$$[N(x,y)] = \begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) \end{bmatrix} \quad et \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

2-Eléments Rectangulaires à 4 nœuds.

(même principe de développement que pour l 'élément triangulaire)



$$\{U(x,y)\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$$

Les champs de déplacements selon x : u(x,y) et selon y : v(x,y) seront interpolés avec les mêmes fonctions. Ainsi

$$u\,(x,y) = [N_i(x,y)]\{u_i\} = [N_1(x,y) \quad N_2(x,y) \quad N_3(x,y) \quad N_4(x,y)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$v\,(x,y) = [N_i(x,y)]\{v_i\} = [N_1(x,y) \quad N_2(x,y) \quad N_3(x,y) \quad N_4(x,y)] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Interpolation de u(x,y) et détermination des N_i(x,y):

la fonction puisque u(x,y) est interpolée par 4 valeurs u_i , nous prenons donc quatre monômes de la base polynomiale.

Cependant dans ce cas le nombre de termes ne correspond pas dans la base à un polynôme complet. En effet les 3 premier termes correspondent au degré 1 et il reste à définir un seul terme qu'il faudra prendre sur les termes du degré 2 : $x^2,\ y^2 \ ou \ xy$?

Il évident qu'il faut prendre le terme xy car il permet d'avoir une interpolation bilinéaire (selon x ou selon y) , alors que $x^2 \ ou \ y^2$ sont quadratiques ce qui ne correspond pas a notre cas qui ne comporte que 2 valeurs par coté (au max une interpolation linéaire)

$$u\,(x,y) = [1 \quad x \quad y \quad xy] \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy$$

Nous notons que dans ce cas l'interpolation est **bilinéaire** en x et y (le polynôme est incomplet du 2 degré)

l'élément triangulaire a 4 nœuds et 1 ddl u /noeud:

$$au\ noeud\ 1\quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow\ u(x_1, y_1) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 x_1 y_1 = u_1$$

$$au\ noeud\ 2\quad \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow\ u(x_2, y_2) = \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 x_2 y_2 = u_2$$

$$au\ noeud\ 3\quad \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow\ u(x_3, y_3) = \alpha_0 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3 + \alpha_3 x_3 y_3 = u_3$$

$$au\ noeud\ 4\quad \begin{Bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow\ u(x_4, y_4) = \alpha_0 + \alpha_1 x_4 + \alpha_2 y_4 + \alpha_3 x_4 y_4 = u_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

avec

$$u\,(x, y) = [1 \;\; x \;\; y \;\; xy] \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = [1 \;\; x \;\; y \;\; xy] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

sachant que

$$u(x, y) = [N_i(x, y)]\{u_i\} = [N_1(x, y) \quad N_2(x, y) \quad N_3(x, y) \quad N_4(x, y)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

ainsi

$$[N_1(x, y) \quad N_2(x, y) \quad N_3(x, y) \quad N_4(x, y)] = [1 \;\; x \;\; y \;\; xy] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix}^{-1}$$

l'interpolation du champ de déplacement pour un élément rectangulaire s'écrit

$$\{U(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [N(x, y)]\{q\}$$

Avec $[N(x,y)]$: fonction de forme de l'élément rectangulaire de membrane à quatre nœuds et $\{q\}$ vecteur déplacement nodaux (réarrangé dans l'ordre des numéros des nœuds) :

$$[N(x,y)] = \begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 & N_4(x,y) & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 & N_4(x,y) \end{bmatrix} \quad et \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Remarque :

On principe, on pourra continuer avec cette procédure et trouver les fonctions de formes de n'import quel élément. Mais il est claire qu'avec l'augmentation du nombre de nœuds et de ddl, leurs expressions vont être très lourdes à manipuler s'ils sont définies dans un repère en coordonnées cartésienne.

Dans la pratique en éléments finis, Il est plus intéressant de pouvoir opter pour une autre démarche consistant à déterminer ces fonctions de formes dans des repères sans dimension définie entre (-1 et +1) appelé repère en coordonnées paramétriques (ou intrinsèques ou naturelles). Une transformation permettra de revenir vers les coordonnée dans le repère réel. L'élément ainsi construit dans le repère paramétrique est appel élément de référence et l'élément dans le repère orignal est appelé élément réel.

Cette manière de faire permet de construire les fonction de forme des éléments et donc de leurs matrices de rigidités de manière simple et de revenir ensuite à l'élément réel par simple transformation dans le repère réel.

Par ailleurs, ce dernier aspect présente un autre avantage consistant à permettre, lorsque la calcul de la matrice de rigidité par une intégration formelle est impossible sur le domaine, d'opter pour une méthode d'intégration numérique sur le domaine. (tous ces aspect seront développés plus loin dans le cours)

Coordonnes paramétriques , intrinsèque ou naturelles (sans dimension)

reprendre les élément barre , poutre triangle et rectangle en coordonnes paramétriques

.... en cours de redaction...........

Eléments de références

Eléments isoparamétriques