INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Pr. K. DJEGHABA
Département de Génie Civil
Faculté des sciences de l'ingénieur
Université Badji Mokhtar-Annaba

mars 2018

Chapitre II

1-Formulation Intégrale, 2-Approximation, Interpolation, 3-Discrétisation

Partie 3:

Discrétisation

5- Expression Discrétisée de W

Nous avons vu auparavant que l'approximation du champ de déplacement réel $\{U(x,y,z)\}$ s'écrit de manière générale pour un élément :

$$\{U(x,y,z)\} = [N(x,y,z)]\{q\}$$

que nous notons simplement $\{U\} = [N]\{q\}$

revenons à la dernière forme de W trouvée (cas élastique) :

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}_{ext} - \boldsymbol{W}_{int} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{W}_{int} = \int_V \{\, \boldsymbol{\delta\varepsilon} \,\}^t [\boldsymbol{H}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}\ \boldsymbol{dV}$$

$$\boldsymbol{W}_{ext} = \int_S \{\boldsymbol{\delta \mathrm{U}}\}^t \{\boldsymbol{f}_s\}\boldsymbol{dS} + \int_V \{\boldsymbol{\delta \mathrm{U}}\}^t \{\boldsymbol{f}_v\}\boldsymbol{dV}$$

nous nous proposons de trouver l'expression de W sous forme discrétisée en remplaçant le champ de déplacement réel par sa forme discrétisée

5-1- Evaluation de W_{int}

$$W_{int} = \int_V \{\, \delta\varepsilon \,\}^t [H]\{\varepsilon\}\ dV$$

l'expression de le déformation infinitésimal s'écrit :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}].\{U\}$$

$[\mathbf{D}]$ = operateur de dérivation

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \text{ et } \{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{D}].\{U\}$$

nous avons

$$\{U\} = [N]\{q\}$$

ainsi

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{D}].([N]\{q\})$$

Remarque: l'opérateur de dérivation ne concerne que les fonctions de formes :

$$\{\varepsilon\} = ([\mathbf{D}][N]).\{q\}$$

$$\{\varepsilon\} = [B].\{q\}$$

nous notons par $[B]$ la matrice des dérivés des fonctions de formes au sens de l'operateur $[\mathbf{D}]$

$$\boxed{[\mathrm{B}] = [\mathbf{D}].[N]}$$

nous obtenons aussi la variation du vecteur déformation (la variation ne concerne que le vecteur déplacement):

$$\{\delta\varepsilon\} = [B].\{\delta q\}$$

et sa forme transposée

$$\{\delta\varepsilon\}^t = \{\delta q\}^t.[B]^t$$

si nous remplaçons ces termes dans W_{int} :

$$W_{int} = \int_V \{\delta\varepsilon\}^t [H]\{\varepsilon\}\, dV$$

$$W_{int} = \int_V \{\delta q\}^t.[B]^t.[H].[B].\{q\} dV$$

le vecteur déplacement nodale est indépendants de (x,y,z), ainsi :

$$W_{int} = \{\delta q\}^t . \left(\int_V [B]^t . [H] \; . [B] \, dV \right) . \{q\}$$

5-2- Evaluation de W_{ext}

$$W_{ext} = \int_S \{\delta \mathrm{U}\}^t \{f_s\} dS + \int_V \{\delta \mathrm{U}\}^t \{f_v\} dV$$

avec

$$\{U\} = [N]\{q\}$$

de même sa variation

$$\{\delta U\} = [N]\{\delta q\}$$

et sa transposée

$$\{\delta U\}^t = \{\delta q\}^t \, [N]^t$$

$$W_{ext} = \int_S \{\delta q\}^t \, [N]^t \{f_s\} dS + \int_V \{\delta q\}^t \, [N]^t \{f_v\} dV$$

$$W_{ext} = \{\delta q\}^t \left(\int_S \; [N]^t \{f_s\} dS + \int_V \; [N]^t \{f_v\} dV \right)$$

finalement

$$\boldsymbol{W} \quad = \boldsymbol{W_{ext}} - \boldsymbol{W_{int}} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{W_{int}} = \boldsymbol{W_{ext}}$$

$$\{\delta q\}^t . \left(\int_V [B]^t . [H] \; . [B] \, dV \right) . \{q\} = \{\delta q\}^t \left(\int_S \; [N]^t \{f_s\} dS + \int_V \; [N]^t \{f_v\} dV \right)$$

ou plus simplement

$$\left(\int_V [B]^t . [H] \; . [B] \, dV \right) . \{q\} = \left(\int_S \; [N]^t \{f_s\} dS + \int_V \; [N]^t \{f_v\} dV \right)$$

en notant par

$$\boxed{[K] = \int_V [B]^t \, . [H] \, . [B] \, dV}$$

$[\boldsymbol{K}]$: représentant la matrice de rigidité. Elle est constante et dépend seulement des caractéristiques géométriques et physiques de l'élément.

et par

$$\boxed{\{F_{equ}\} = \int_S [N]^t \{f_s\} dS + \int_V [N]^t \{f_v\} dV}$$

$[\boldsymbol{F_{equ}}]$: représente le vecteur charge nodale équivalente au chargement réel

finalement, on obtient la relation de rigidité d'un élément dans son repère local

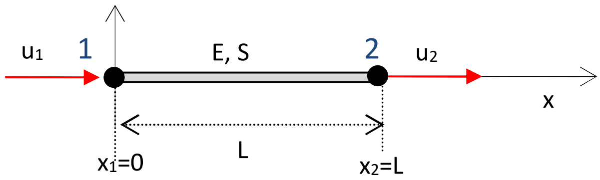
$$[K].\{q\} = \{F_{equ}\}$$

Remarque: Evidemment$[\boldsymbol{K}]$ et $[\boldsymbol{F_{equ}}]$ sont définie dans repère local de l'élément, et donc dans le même repère de définition des fonctions de formes.

5-3- Détermination de la matrice de rigidité et des charge équivalentes - Application aux éléments déjà présentés

5-3-1- Elément de barre à 2 nœuds et 1 ddl par nœuds:

prenons le cas de la barre (déjà manipulée) de longueur **L** et de section **S** et module d'élasticité **E**, placée dans le repère (xy).



sa fonction de forme (déjà vue) s'écrit :

$$[N(x)] = [N_1(x) \quad N_2(x)]$$

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}\ ; \qquad N_2(x) = \frac{x}{L}$$

➢ **Matrice de rigidité** :

la matrice de rigidité s'écrit en général :

$$[K] = \int_v [B]^t.[H].[B]\, dV$$

$$\text{avec} \quad : \quad [B] = [\boldsymbol{D}].[N]$$

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{D}].\{U\}$$

dans notre cas : $\{U\} = u(x)$

dans le cas de la barre en traction compression, la déformation axiale s'écrit:

$$\text{et} \quad \{\varepsilon\} = \left[\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\right].u(x) \qquad \Rightarrow \qquad [\mathbf{D}] = \left[\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\right]$$

$$[B] = [\boldsymbol{D}].[N] = \left[\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\right].[N_1(x) \quad N_2(x)] = \left[\frac{dN_1(x)}{dx} \quad \frac{dN_2(x)}{dx}\right] = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\right]$$

$$[H] = E \quad : module\ de\ Young$$

ainsi :

$$[K] = \int_v \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} .E.\left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\right] dV$$

$$[K] = E\int_v \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dV = E\int_x \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx \int_y dy \int_z dz$$

en posant

$$S = \int_y dy \int_z dz$$

$$[K] = E.S\int_x \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx = E.S\int_x \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

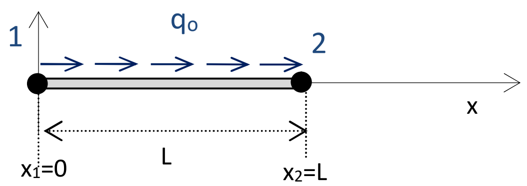
dans le repère (xy) , la matrice de rigidité de la barre s'écrit :

$$[K] = E.S\int_0^L \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} dx = \frac{E.S}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Charges équivalentes** :

nous présentons le calcul des charges équivalentes pour des cas simples de charge uniforme repartie le long de la barre et de charge ponctuelle sur la barre:

** cas de la charge répartie uniforme* q_o:



les charges équivalentes s'écrivent en général :

$$\{F_{equ}\} = \int_S [N]^t \{f_s\} dS + \int_V [N]^t \{f_v\} dV$$

dans notre cas les forces de volume sont négligées et le vecteur des forces de surface s'écrit simplement en force répartie uniforme selon x (pas de ddl selon y):

$$\{f_s\} = q_o$$

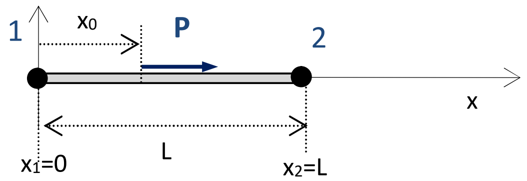
$$\{F_{equ}\} = \int_S [N]^t \{f_s\} dS = \int_x [N]^t . q_o . dx$$

$$\{F_{equ}\} = \int_x \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix} . q_o . dx = \int_x \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} . q_o . dx$$

dans le repère local choisi

$$\{F_{equ}\} = q_o \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q_o L}{2} \\ \frac{q_o L}{2} \end{Bmatrix}$$

cas de la charge ponctuelle P: (appliquée à x_o)



dans ce cas le vecteur des forces de surface se réduit à une force ponctuelle appliquée à x_o.

$$\{f_s\} = P$$

dans ce cas, l'évaluation de l'intégration se réduit à évaluer simplement la fonction à intégrer en x_o :

$$\{F_{equ}\} = \int_S \ [N]^t \{f_s\} dS = \int_x \ [N]^t . P . dx$$

$$\{F_{equ}\} = [N(x_o)]^t . P$$

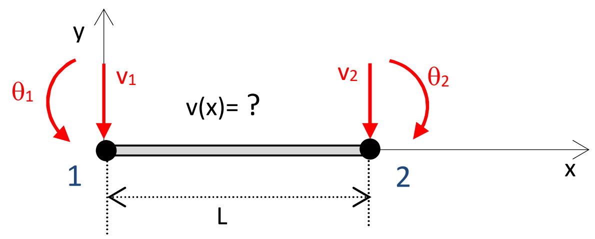
$$\{F_{equ}\} = \begin{bmatrix} N_1(x_0) \\ N_2(x_0) \end{bmatrix} . P = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x_o}{L} \\ \frac{x_o}{L} \end{bmatrix} . P$$

dans le repère local choisi

$$\{F_{equ}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P(1 - \frac{x_o}{L}) \\ P(\frac{x_o}{L}) \end{Bmatrix}$$

5-3-2- Elément de Poutre à 2 nœuds et 2 ddl par nœuds:

prenons le cas de la Poutre (déjà manipulée) de longueur **L** et d'Inertie **I**, et module d'élasticité **E** . placée dans le repère (xy).



sa fonction de forme (déjà vue) s'écrit :

$$[N(x)] = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)]$$

$$avec \quad N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}; \quad N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}; \quad N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}; \quad N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

- **<u>Matrice de rigidité</u>** : la matrice de rigidité s'écrit en général :

$$[K] = \int_v [B]^t . [H] . [B] \, dV$$

avec : $[B] = [\boldsymbol{D}] . [N]$

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{D}] . \{U\}$$

dans notre cas $\{U\} = v(x)$

dans le cas de la poutre en flexion, la déformation axiale s'écrit (courbure):

$$\{\varepsilon\} = -y \left[\frac{\mathbf{d^2}}{\mathbf{dx^2}}\right] . v(x) \qquad \Rightarrow \qquad [\mathbf{D}] = -y \left[\frac{\mathbf{d^2}}{\mathbf{dx^2}}\right]$$

$$[B] = [\boldsymbol{D}] . [N] \;=\; -y \left[\frac{\mathbf{d^2}}{\mathbf{dx^2}}\right] . [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)]$$

$$[B] = \left[y.\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) \quad y.\left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \quad y.\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) \quad y.\left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \right]$$

$$[H] = E \quad : module\ de\ Young$$

ainsi , en posant $[B'] = \left[\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) \quad \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \quad \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) \quad \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \right]$

$$[B] = y . [B']$$

$$[K] = \int_v [B]^t . E . [B] \, dV = E \int_x [B']^t [B'] dx \iint_{yz} y^2 dy \, dz$$

en notant par I_z le moment d'inertie, celui ci s 'écrit $I_z = \iint_{yz} y^2 dy \, dz$

$$[K] = EI_z \int_x [B']^t [B'] dx$$

la matrice est donc de taille (4x4), nous développons par exemple le terme K(1,1) dans le repère choisi (xy)

$$K(1,1) = EI_z \int_x \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right).\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) dx = \frac{12EI_z}{L^3}$$

en calculant tous les termes , nous obtenons toute la matrice de rigidité de l élément poutre dans le repère (xy) :

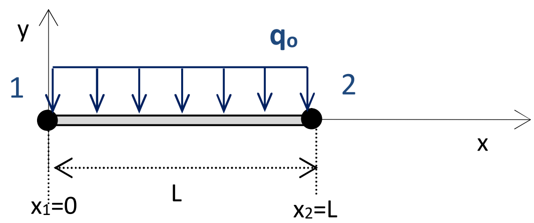
$$[K] = EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^3} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

<u>Charges équivalentes</u> :

nous présentons le calcul des charges équivalentes pour quelques cas simples de chargement

- *Charge répartie uniforme*
- *Charge répartie triangulaire*
- *Charge ponctuelle sur la poutre:*

<u>Charge répartie uniforme</u> :



les charges équivalentes s'écrivent en général :

$$\{F_{equ}\} = \int_S [N]^t \{f_s\} dS$$

le vecteur des forces de surface s'écrit simplement en force répartie uniforme selon x et dans le repere (xy)

$$\{f_s\} = -q_o$$

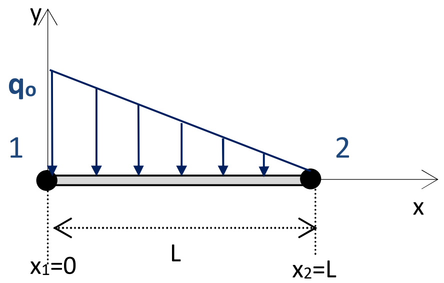
$$\{F_{equ}\} = \int_S [N]^t \{f_s\} dS = -\int_x [N]^t . q_o . dx$$

$$\{F_{equ}\} = -\int_x \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{bmatrix} . q_o . dx = -\int_x \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} . q_o . dx$$

dans le repère local choisi (xy)

$$\{F_{equ}\} = -q_o \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{q_o L}{2} \\ -\frac{q_o L^2}{12} \\ -\frac{q_o L}{2} \\ \frac{q_o L^2}{12} \end{Bmatrix}$$

Charge répartie triangulaire :



les charges équivalentes s'écrivent en général :

$$\{F_{equ}\} = \int_S [N]^t \{f_s\} dS$$

le chargement répartie triangulaire selon x s'écrit dans le repère (xy) :

$$q(x) = -q_o(1 - \frac{x}{L})$$

le vecteur des forces de surface s'écrit simplement selon x :

$$\{f_s\} = q(x)$$

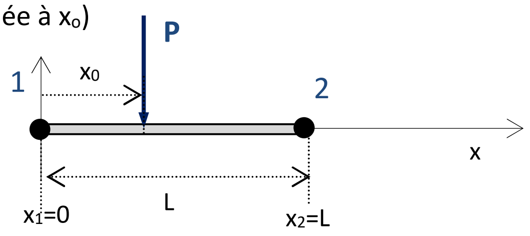
$$\{F_{equ}\} = \int_S [N]^t \{f_s\} dS = \int_x [N]^t . q(x). dx$$

$$\{F_{equ}\} = \int_x \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{bmatrix} . q(x)\, dx = -\int_x \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} . q_o(1 - \frac{x}{L}). dx$$

dans le repère local choisi

$$\{F_{equ}\} = -q_o \int_0^L \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)(1 - \frac{x}{L}) \\ (x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2})(1 - \frac{x}{L}) \\ (\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3})(1 - \frac{x}{L}) \\ (-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2})(1 - \frac{x}{L}) \end{bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{7Lq_o}{20} \\ -\frac{q_o L^2}{20} \\ -\frac{3q_o L}{20} \\ \frac{q_o L^2}{30} \end{Bmatrix}$$

Charge ponctuelle P: (appliquée à x_o)



dans ce cas le vecteur des forces de surface se réduit à une force ponctuelle appliquée à x_o.

$$\{f_s\} = -\mathrm{P}$$

dans ce cas, l'évaluation de l'intégration se réduit à évaluer simplement l'intégrant en x_o :

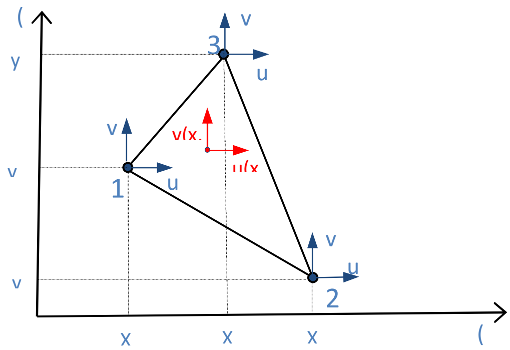
$$\{F_{equ}\} = \int_S \ [N]^t \{f_s\} dS = -[N(x_o)]^t.P$$

$$\{F_{equ}\} = -\begin{bmatrix} N_1(x_0) \\ N_2(x_0) \\ N_3(x_0 \\ N_4(x_0 \end{bmatrix}.P = -\begin{bmatrix} 1 - \frac{3{x_o}^2}{L^2} + \frac{2{x_o}^3}{L^3} \\ x_o - \frac{2{x_o}^2}{L} + \frac{{x_o}^3}{L^2} \\ \frac{3{x_o}^2}{L^2} - \frac{2{x_o}^3}{L^3} \\ -\frac{{x_o}^2}{L} + \frac{{x_o}^3}{L^2} \end{bmatrix}.P$$

dans le repère local choisi

$$\{F_{equ}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P.(1 - \frac{3{x_o}^2}{L^2} + \frac{2{x_o}^3}{L^3}) \\ -P.(x_o - \frac{2{x_o}^2}{L} + \frac{{x_o}^3}{L^2}) \\ -P.(\frac{3{x_o}^2}{L^2} - \frac{2{x_o}^3}{L^3}) \\ -P.(-\frac{{x_o}^2}{L} + \frac{{x_o}^3}{L^2}) \end{Bmatrix}$$

5-3-2- Elément Triangulaire Plan de membrane à 3 nœuds



Le champ de déplacement dans ce cas s'écrit dans le repère global (x,y):

$$\{U(x,y)\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$$

les fonctions de formes $[N(x,y)]$ de cette élément (déjà vues) sont telles que :

$$\{U(x,y)\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = [N(x,y)]\{q\}$$

$$[N(x,y)] = \begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) \end{bmatrix} \quad et \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

ou

$$N_1(x,y) = \frac{1}{2A}[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$N_2(x,y) = \frac{1}{2A}[(x_1y_3 - x_3y_1) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

$$N_3(x,y) = \frac{1}{2A}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

- **<u>Matrice de rigidité</u>** :

la matrice de rigidité s'écrit en général :

$$[K] = \int_v \, [B(x,y)]^t.[H].[B(x,y)]\,dV$$

avec : $[B(x,y)]$= $[\boldsymbol{D}].[N(x,y]$

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [\mathbf{D}].\{U(x,y)\}$$

dans notre cas et comme cela a déjà été montré, le mode de déformation pour ce type d'élément est membranaire (plane en traction/compression)

Ainsi le vecteur de déformation s'écrit:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \end{bmatrix}.\{U(x,y)\} \qquad \Rightarrow \qquad [\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \end{bmatrix}$$

$$[B(x,y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) \end{bmatrix}$$

$$[B(x,y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \mathrm{x}} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \mathrm{x}} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \mathrm{x}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial \mathrm{x}} \end{bmatrix}$$

en posant :

$$y_{23} = (y_2 - y_3) \quad y_{31} = (y_3 - y_1) \quad y_{12} = (y_1 - y_2)$$

$$x_{23} = (x_2 - x_3) \quad x_{31} = (x_3 - x_1) \quad x_{12} = (x_1 - x_2)$$

$$[B(x,y)] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & -x_{23} & 0 & -x_{31} & 0 & -x_{12} \\ -x_{23} & y_{23} & -x_{31} & y_{31} & -x_{12} & y_{12} \end{bmatrix}$$

Remarque : les fonctions de formes de cette élément sont linéaires par rapport à x et y.

la matrice $[B(x,y)]$ dans ce cas (dérivés des fonctions de formes) est constante /x et /y.

Par ailleurs la matrice de HOOKE étant constante aussi.

dans ce cas :

$$[K] = \int_v [B(x,y)]^t . [H] . [B(x,y)] \, dV = [B(x,y)]^t . [H] . [B(x,y)] \int_v dV$$

$$\int_v dV = t . A$$

t : épaisseur de l'élément
A: Surface de l'élément

finalement , la matrice de rigidité s'écrit simplement :

$$[K] = t . A . [B(x,y)]^t . [H] . [B(x,y)]$$

Remarque: selon le mode de déformation (contrainte plane ou déformation plane); la matrice de Hooke s'écrit :

$$[H] = \frac{E}{(1-\vartheta^2)}\begin{bmatrix} 1 & \vartheta & 0 \\ \vartheta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\vartheta}{2} \end{bmatrix}$$