

TD (F. Analytiques)

Ce TD est destiné aux étudiants de 2^e année licence mines
(*Maths 4*)

April 14, 2020

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(z) = P(x, y) + i Q(x, y)$

avec $P, Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

dans $\mathbb{C}$, f est analytique $\iff f$ est holomorphe $\iff \left\{ \begin{array}{l} P, Q \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \\ \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \\ \text{et } \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y). \end{array} \right.$

Exercice 1 *Montrer que*

1) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(z) = z^2$ est analytique sur $\mathbb{C}$.

2) $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $f(z) = \operatorname{Re} z$ et $g(z) = \operatorname{Im} z$ ne sont pas analytiques nulle part.

Solution

1) on a

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 = (x + iy)^2 \\ &= x^2 - y^2 + 2ixy \end{aligned}$$

où $P(x, y) = x^2 - y^2$ et $Q(x, y) = 2xy$

alors

P, Q de classe $\mathcal{C}^1$

de plus,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) &= 2x = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= -2y = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y). \end{aligned}$$

Par conséquent,
 f est analytique et

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \\ &= 2x + i 2y \\ &= 2(x + iy) = 2z. \end{aligned}$$

2) Soit $z = x + iy$

ceci implique que $\operatorname{Re} z = x$ et $\operatorname{Im} z = y$.

en effet,

$$f(z) = \operatorname{Re} z$$

posons $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$

où $P(x, y) = x$ et $Q(x, y) = 0$

alors

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 0$$

donc f n'est pas analytique dans $\mathbb{C}$.

De même

$$g(z) = \operatorname{Im} z$$

posons $g(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$

où $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = y$

alors

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 0 \neq \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 1$$

donc g n'est pas analytique dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2 Déterminer une fonction analytique dont

$$P(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$$

est la partie réelle.

Solution

Soit $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$

il suffit de déterminer Q .

$$f \text{ est analytique, i.e. } \begin{cases} P, Q \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \\ \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

On utilise les conditions de Cauchy-Riemann
en effet,

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 6xy - 2 \dots\dots\dots(2)$$

en intégrant l'équation (1) par rapport à y (x fixé), on obtient

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \int (3x^2 - 3y^2) dy \\ &= 3x^2y - y^3 + k(x) \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

en dérivant (3) par rapport à x et en remplaçant dans (2), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= 6xy + k'(x) = 6xy - 2 \\ \implies k'(x) &= -2 \end{aligned}$$

en intégrant par rapport à x , on obtient

$$\begin{aligned} k(x) &= \int (-2) dx \\ &= -2x + c, \quad c \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

donc les fonctions Q sont

$$Q(x, y) = 3x^2y - y^3 - 2x + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Puisque les fonctions P, Q sont continues sur $\mathbb{R}^2$, alors les fonctions complexes correspondantes

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

sont holomorphes dans $\mathbb{C}$, de plus, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= x^3 - 3xy^2 + 2y + i(3x^2y - y^3 - 2x + c), \quad c \in \mathbb{C} \\ &= (x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3) - 2i(x + iy) + ic \\ &= z^3 - 2iz + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Exercice 3 Déterminer les séries de Taylor à l'origine de

$$\frac{1}{1-z}, \quad \frac{1}{(1-z)^2}, \quad \frac{1}{(1-z)^3}, \quad \frac{1}{(1-z)^4}.$$

Solution

Ces fonctions sont holomorphes dans $E = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

On cherche le développement (ou bien la série) de Taylor de ces fonctions en $z_0 = 0$.

on a

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n, \quad |z| < 1.$$

Pour la fonction $\frac{1}{(1-z)^2}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^2} &= \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \left(\sum_{n \geq 0} z^n \right)' = \sum_{n \geq 0} (z^n)' \\ &= \sum_{n \geq 1} n z^{n-1}, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

Et pour la fonction $\frac{1}{(1-z)^3}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^3} &= \left(\frac{1}{1-z} \right)'' = \left(\sum_{n \geq 0} z^n \right)'' = \sum_{n \geq 0} (z^n)'' \\ &= \sum_{n \geq 2} n(n-1) z^{n-2}, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^3} &= \left(\frac{1}{(1-z)^2} \right)' = \left(\sum_{n \geq 1} n z^{n-1} \right)' = \sum_{n \geq 1} n (z^{n-1})' \\ &= \sum_{n \geq 2} n(n-1) z^{n-2}, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

De même manière pour la fonction $\frac{1}{(1-z)^4}$, en effet

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^4} &= \left(\frac{1}{1-z}\right)''' = \left(\sum_{n \geq 0} z^n\right)''' = \sum_{n \geq 0} (z^n)''' \\ &= \sum_{n \geq 3} n(n-1)(n-2) z^{n-3}, \quad |z| < 1.\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^4} &= \left(\frac{1}{(1-z)^3}\right)' = \left(\sum_{n \geq 2} n(n-1) z^{n-2}\right)' = \sum_{n \geq 2} n(n-1) (z^{n-2})' \\ &= \sum_{n \geq 3} n(n-1)(n-2) z^{n-3}, \quad |z| < 1.\end{aligned}$$

Exercice 4 Déterminer la série de Taylor et le rayon de convergence en $z_0 = 3$ de la fonction analytique suivante:

$$f(z) = \frac{1}{z-1}, \quad z \neq 1.$$

Solution

La fonction f est holomorphe dans $E = \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{(z-3) + (3-1)} = \frac{1}{(z-3) + 2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{3-z}{2}} \quad (\text{sous la forme } \frac{1}{1-Z} = \sum_{n \geq 0} Z^n) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{3-z}{2}\right)^n\end{aligned}$$

$$\text{avec } \left|\frac{3-z}{2}\right| < 1 \implies |z-3| < 2$$

donc le rayon de convergence est $R = 2$.

Exercice 5 Déterminer la série de Taylor en $z_0 = 1$ de la fonction suivante:

$$f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad z \neq 0.$$

Solution

La fonction f est holomorphe dans $E = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

On va choisir un voisinage de $z_0 = 1$, il suffit de prendre le disque ouvert centré en $z_0 = 1$ et de rayon $r = 1$.

f est bien analytique sur ce disque $\mathcal{D}(1, 1)$, alors

$\forall z \in \mathcal{D}(1, 1)$, on a

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n \geq 0} a_n (z - 1)^n.$$

Calculons a_n ,

1^{ère} méthode

Par définition $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(1)}{n!},$

on calcule $f^{(n)}$ par récurrence

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} \implies f'(z) = \frac{-2}{z^3} \\ \implies f''(z) &= \frac{2 \cdot 3}{z^4} \\ \implies f'''(z) &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{z^5} \\ &\vdots \\ \implies f^{(n)}(z) &= (-1)^n \frac{(n+1)!}{z^{n+2}} \end{aligned}$$

donc

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{z^{n+2}} \implies f^{(n)}(1) = (-1)^n (n+1)!$$

ainsi

$$a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^n \frac{(n+1)!}{n!} = (-1)^n (n+1)$$

d'où

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - 1)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (n+1) (z - 1)^n, \quad |z - 1| < 1.$$

2^{ème} méthode

Posons $Z = z - 1 \implies z = 1 + Z$, on a

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(1 + Z)^2}$$

et d'après la formule

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}z^n + \dots, \quad |z| < 1,$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= \frac{1}{(1+Z)^2} = (1+Z)^{-2} \\ &= 1 - 2Z + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}Z^2 + \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!}Z^3 + \dots, \quad |Z| < 1 \\ &= 1 - 2Z + 3Z^2 - 4Z^3 + \dots \\ &= 1 - 2(z-1) + 3(z-1)^2 + \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n (n+1) (z-1)^n, \quad |z-1| < 1. \end{aligned}$$