Considérations générales

1._ Fluidité des liquides

Le fluide est caractérisé par le fait que ses molécules sont très mobiles les unes par rapport aux autres, elles se déplacent sous l'action de très faibles efforts de sorte que à l'inverse d'un solide, un fluide n'offre aucune résistance aux déformations, et épouse sans résistance la forme du récipient qui le contient. c'est ce qui constitue la fluidité.

2. Surface libre.

dans tout récipient contenant un liquide, il existe une surface de contact entre le liquide et le gaz (air), celle-ci est appelé surface libre.

3- Liquide parfait.

en hydraulique il existe la notion de liquide parfait pour faciliter la résolution des problèmes pratiques et la recherche théorique.
Un liquide parfait est considéré totalement indilatable, incompressible, ses particules sont totalement mobiles, d'où un écoulement sans frottement,
~~la notion pour les liquides réels~~

4. Forces agissantes sur le liquide

La mécanique étudie les états d'équilibres (statique) et les mouvements (dynamique) des liquides sous l'action des forces, ces forces appartiennent à 2 groupes:

* Forces de masse (massique) agissantes sur la masse entière et proportionnelles à cette masse. (force de gravité et force d'inertie)
* Forces de surface (superficielle) agissantes sur une surface de séparation de deux parties du corps ou deux milieux dif.

Hydrodynamique des fluides parfait

L'hydrodynamique des fluides parfait étudie la liaison entre les forces extérieures et le mouvement du fluides.

Donc on se propose d'établir les relations entre les positions des particules fluides, le temps et les forces qui interviennent.

L'équation de base qui lie ces différents paramètres est appelée l'équation d'Euler et qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{grad}\,P$$

$\frac{d\vec{V}}{dt}$: les forces d'inertie.

$\vec{F}$: les forces de masse.

$\frac{1}{\rho}\,grad\,P$ = les forces superficielles.

En la projetant sur les 3 axes, elle nous donne :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \\
\frac{dv_y}{dt} &= f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \\
\frac{dv_z}{dt} &= f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\quad \text{équations d'Euler}$$

Dans les équations d'Euler on considère comme connues la densité et les forces massiques f_x, f_y, f_z.

Les inconnues sont $v_x(x,y,z,t)$,

$v_y(x,y,z,t)$,

$v_z(x,y,z,t)$,

et la pression $P(x,y,z,t)$.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,P.$$

$\frac{d\vec{V}}{dt}$: accélération absolue.

f : contrainte des f. de masse.

cette équation vectorielle projetée sur les axes fournit les 3 équations suivantes.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV_x}{dt} &= f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\\ \frac{dV_y}{dt} &= f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\\ \frac{dV_z}{dt} &= f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\end{aligned}\right\}$$

ce sont les équations générales du mouvement appelé plus communément équation d'Euler.

2. l'équation caractéristique.

pour un liquide supposé incompressible cette équation s'écrit

$$\boxed{\rho = c^{te}}.$$

3. l'équation de continuité

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{V} = 0}.$$

Donc comme il a été stipulé, il a fallu déterminé en fonction du temps et des forces agissantes et pour chaque point de la masse fluide, la vitesse $\vec{V}$, la pression P, et la masse volumique ρ des particules fluides qui viennent passer successivement passer par ce point.

Donc pour cela nous disposons actuellement 5 équations qui nous permettent de déterminer ces paramètres en fonctions de x, y, z, t et qui se compose :

- d'un système de trois équations d'Euler.
- l'équation caractéristique.
- l'équation de continuité.

4. équation du mouvement le long de la trajectoire pour un mouvement permanent :

$f_x = X$, $f_y = Y$, $f_z = Z$.

Reprenons les équations d'Euler sous la forme suivante.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = X - \dfrac{d^2 x}{dt^2} & \dfrac{dv_x}{dt} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} = Y - \dfrac{d^2 y}{dt^2} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} = Z - \dfrac{d^2 z}{dt^2} \end{cases}$$

Proposons-nous d'établir la relation existante entre X, Y, Z, x, y, z, P, ρ et t le long de la trajectoire d'une molécule liquide.

A cet effet considérons les coordonnées de deux point M et M' infiniment voisins situés sur la trajectoire de la molécule liquide qui passe en M ~~au~~ temps t et en M' au temps $t + dt$.

Soient :

x , y , z les coordonnées de M.

$x + dx$ $y + dy$ $z + dz$ — " — de M'

Multiplions la première équation du système précédent par dx, la second par dy, la troisième par dz et additionnant, on voit ainsi.

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) = (X dx + Y dy + Z dz)$$

$$- \left(\frac{dv_x}{dt}dx + \frac{dv_y}{dt}dy + \frac{dv_z}{dt}dz\right)$$

- le premier terme de cette équation $= \dfrac{1}{\rho} dP$.

- aussi nous savons que $\dfrac{dx}{dt} = v_x$, $\dfrac{dy}{dt} = v_y$ $\dfrac{dz}{dt} = v_z$.

donc le 2e terme du second membre devient :

$$v_x\, dv_x + v_y\, dv_y + v_z\, dv_z$$

et qui est égale à $\underline{V\, dV}$.

et en définitive on obtient l'équation suivante :

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\,dP = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - V\,dV.}$$

c'est l'équation fondamentale du mouvement le long de la trajectoire dans un régime permanent.

5. Application de l'équation générale du mouvement dans le cas particulier.

* Cas d'un liquide incompressible dans le champ de la pesanteur

Théorème de Bernoulli.

~~examinons tout d'abord le cas particulier et fréquent d'un écoulement liquide où toutes les vitesses sont normales à une section transversale plane du courant et égales entre elles.~~

considérons le cas d'un écoulement quelconque en régime permanent d'un liquide supposé incompressible dans le champ de la pesanteur. cela suppose que le débit est constant et que son équation caractéristique

$$\rho = cte.$$

appliquons l'équation générale du mouvement permanent. le liquide en mouvement étant supposé soumis à la seule action de la pesanteur on a :

$$X = Y = 0$$

$$Z = -g.$$

l'équation s'écrit alors.

$$\frac{1}{\rho}\,dp = -g\,dz - v\,dv.$$

intégrons.

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = cte. \qquad /g$$

$$\boxed{z + \frac{p}{\omega_{=\rho g}} + \frac{v^2}{2g} = cte}$$

on obtient une équation dans laquelle ~~c'est l'équation de bernoulli dans laquelle~~ $z + \frac{p}{\omega}$ est une ~~représente~~ hauteur représentative de la pression et le terme $v^2/2g$ homogène à une longueur qui est la hauteur représentative de la vitesse. c'est la hauteur de laquelle devrait tomber la molécule liquide en chute libre dans le vide pour acquérir la vitesse v.

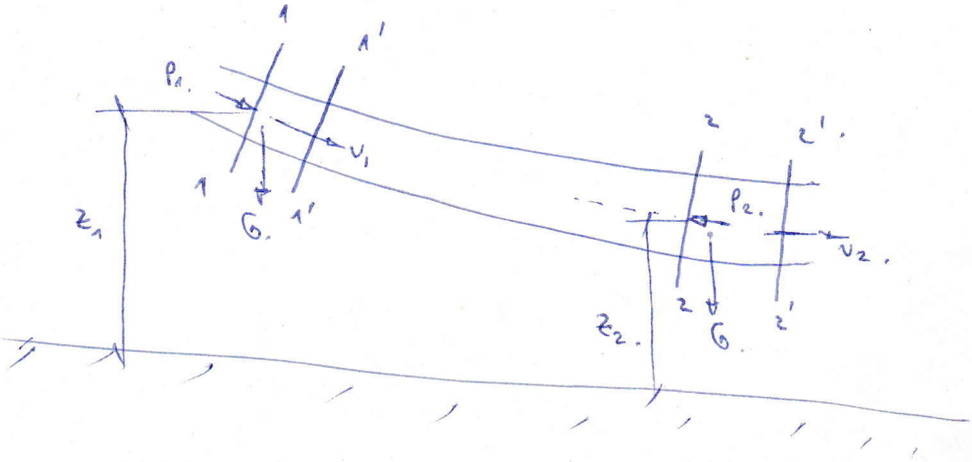
la constante est donc homogène à une longueur H.

On a donc tout le long de la trajectoire d'une molécule liquide

$$\boxed{z + \frac{p}{w} + \frac{v^2}{2g} = H = cte.}$$

cette équation reste applicable si au lieu de considérer la trajectoire d'une molécule on considère un filet liquide.

examinons un filet liquide de fluidité parfaite en écoulement permanent. et essayons de déterminer l'équation de Bernoulli en se basant sur la loi de la conservation de l'énergie.



envisageant une partie d'un filet limité par deux sections A et B.

ΔS_1, V_1, P_1 et Z_1 sont respectivement l'aire, la vitesse, la pression et la hauteur de la première section.

ΔS_2, V_2, P_2 et Z_2 ~~sont~~ pour la 2e section.

en l'espace d'un temps infiniment petit Δt, la partie considérée du filet se déplace sous l'action de forces extérieures. et arrivent à 1'-2'.

appliquons la loi de la conservation de l'énergie cinétique qui stipule que le travail des forces ~~est~~ agissant sur un corps est égal à la variation de l'énergie cinétique

Dans le cas considéré, ces forces sont :

- les forces de pressions.
- les forces de pesanteur.

travail des forces de pression : (produit de la force par le deplacement.

$dQ = v_1 dS_1 = v_2 dS_2$,

$$P_1 . dS_1 . v_1 dt - P_2 dS_2 v_2 dt = P_1 dQ dt - P_2 dQ dt,$$
$$= dQ dt (P_1 - P_2).$$

le travail des forces de pesanteur : est égale à la variation d'energie potentiel de position.

$dG = \gamma v_1 dS_1 dt$ $\quad \frac{N.m.m^2.s}{m^3.s}$

$dG = \rho g \, dQ \, dt$

$$dE = dG(z_1 - z_2) . = \rho g \, dQ \, dt (z_1 - z_2)$$

$dG = \rho g \, dV = \rho g \, dQ \, dt$

la variation de l'energie cinétique de la masse liquide considéré est égale à :

$$\Delta E_c = E_{c\,1'2'} - E_{c\,12}$$
$$= E_{c\,1'2} + E_{c\,22'} - (E_{c\,11'} + E_{c\,1'2})$$
$$= \cancel{E_{c\,1'2}} + E_{c\,22'} - E_{c\,11'} - \cancel{E_{c\,1'2}}$$
$$= E_{c\,22'} - E_{c\,11'}$$
$$= dm_2 \frac{V_2^2}{2} - dm_1 \frac{V_1^2}{2}$$
$$= \rho \, dV_{22'} . \frac{V_2^2}{2} - \rho \, dV_{11'} \frac{V_1^2}{2}$$
$$= \rho \, dQ \, dt \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right)$$

$V_{22'}$ = volume

$V_{11'}$ = volume.

$dQ = VS$. $\quad V \quad m^3 \quad dQ \cdot dt$

$\frac{dQ}{S}$ $\quad m^3/s$

$dQ = \int v \, dS$

$V = dQ \, dt$

D'après la loi de la conservation de l'énergie : on a :

$$\rho\, dQ\, dt\, (P_1 - P_2) + \rho g\, dQ\, dt\, (z_1 - z_2) = \rho\, dQ\, dt \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right)$$

en divisant les 2 membres par $\rho\, dQ\, dt$ on obtient :

$$g(z_1 - z_2) + \frac{P_1 - P_2}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2}$$

en regroupant les termes du même indice on aura :

$$g z_1 - g z_2 + \frac{P_1}{\rho} - \frac{P_2}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2}$$

$$\boxed{g z_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = g z_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2}}$$

c'est l'équation de Bernoulli pour un filet de liquide non visqueux en mouvement permanent sous l'action des seules forces de gravité.

qui peut être écrite aussi :

$$\boxed{z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = cte}$$

ce qui veut dire que que tout le long d'un filet liquide de fluidité parfaite en mouvement permanent, l'énergie mécanique totale par unité de poids du liquide se conserve.

Tout le long d'un filet liquide en mouvement permanent, il y a transformation d'énergie potentielle en énergie cinétique et réciproquement.

ρz : represente l'energie potentiel de position

$\frac{p}{\rho}$. — " — l'energie — " — de la pression.

$\frac{v^2}{2g}$: " " cinetique dûe à la vitesse du filet élémentaire.

et leur somme H est l'energie mécanique total

$$\boxed{z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = H = cte.}$$

etabli par Daniel Bernoulli en 1738.

* Représentation graphique de l'equation de Bernoulli.

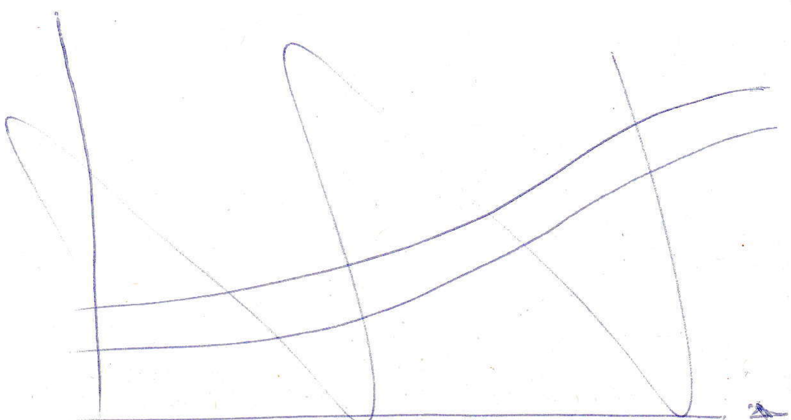
Les termes de l'equation ecrite ont une dimension lineaire et sont appelé,

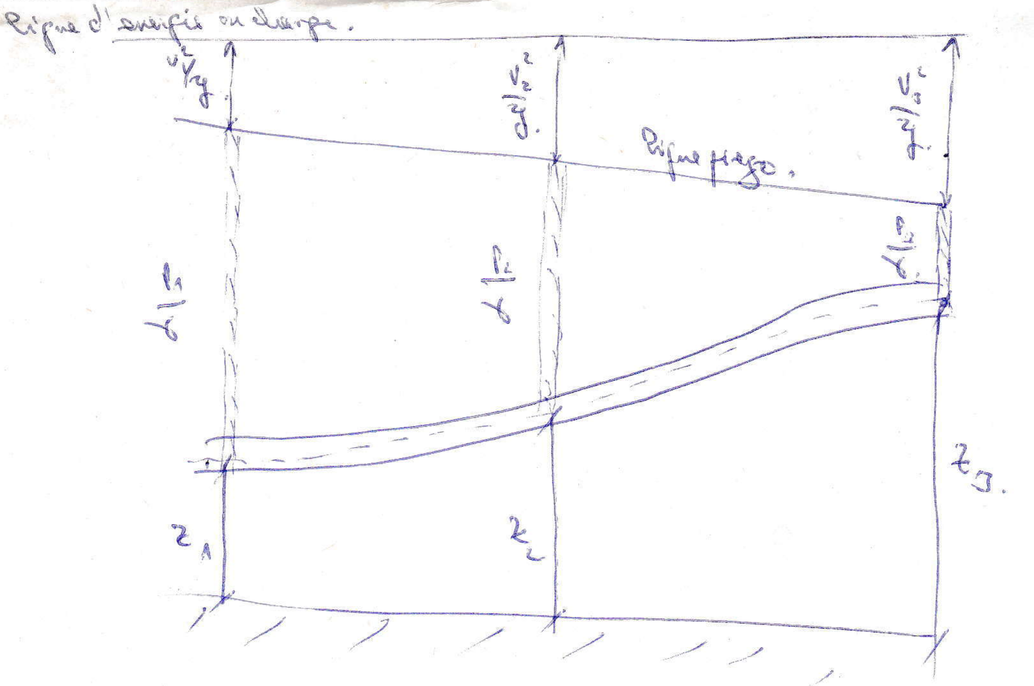
z : la hauteur de position de la section considéré par rapport au plan de reference.

$\frac{p}{\rho g}$: hauteur piezometrique.

$\frac{v^2}{2g}$: la hauteur dynamique ou hauteur due à la vitesse.

l'equation de bernoulli a été écrite pour deux sections differentes quelconque et elle exprime l'egalité des hauteurs totales





vitesse peut être mesuré par le tube de pitot → hauteur dynamique.

$\frac{p_i}{\gamma}$ peut être mesuré par le tubes piezometrique.

de l'equation de bernoulli il en resulte que si l'aire de la section transversale diminue la vitesse d'écoulement augmente et la pression diminue.

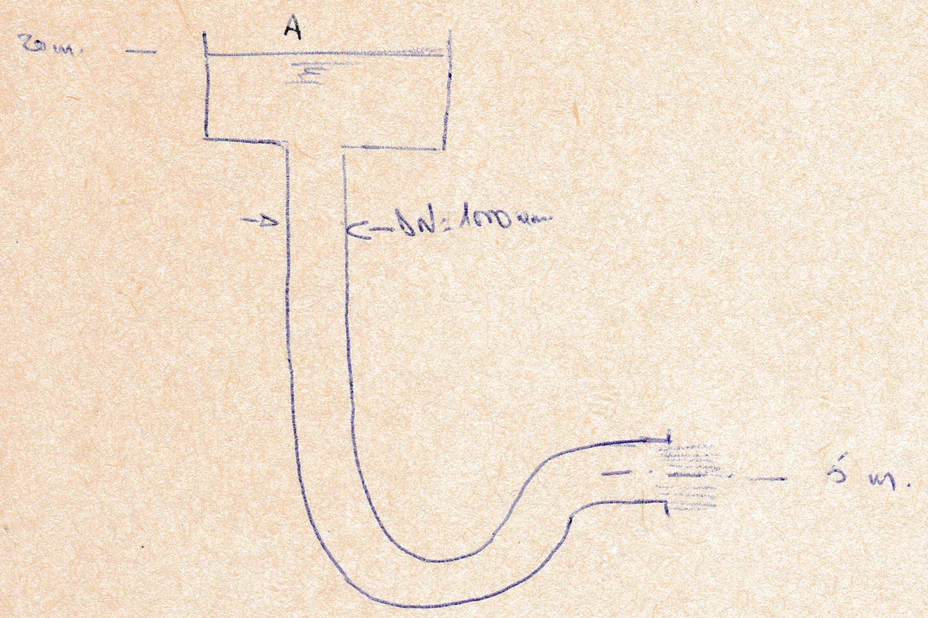
au contraire si le filet s'élargit la vitesse diminue et la pression augmente.

Signification énergetique de l'equation de bernoulli

pour un liquide parfait en mouvement, l'energie totale est constante. l'équation de bernoulli exprime la loi de la conservation de l'energie.

ainsi la signification énergétique de l'équation de Bernoulli pour un filet liquide élémentaire parfait est la constante de l'énergie spécifique totale le long du filet. Par conséquent l'équation exprime le principe de la conservation de l'énergie mécanique dans un liquide parfait.

Application :



- la vitesse d'écoulement
- le débit.

① conservation de la charge :

$$H_A = H_2.$$

avec $H_A = \frac{V_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + Z_A$. $\quad V_A$ = negligeable. $\quad P_A = P_{at}$.

$$\Rightarrow H_A = \frac{P_{at}}{\rho g} + Z_A.$$

$H_2 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$. $\quad P_2 = P_{at}$.

$$\Rightarrow \cancel{\frac{P_{at}}{\rho g}} + Z_A = \frac{V_2^2}{2g} + \cancel{\frac{P_{at}}{\rho g}} + Z_2 \quad \Rightarrow V_2 = \sqrt{2g(Z_A - Z_2)}.$$

si $g = 10\ m/s^2$ $\Rightarrow V_2 = 17{,}32\ m/s$.

d'où le débit : $Q = V_2 \cdot S_2 = 17{,}32 \cdot \frac{\pi \cdot 1}{4} =$