

Extremum et Théorèmes des sets implicite ①

La détermination des extrema, maxima ou minima, d'une fonction est un problème important de nombreuses applications.

Définition 1: un point $x_0 \in D(f)$ est appelé point critique de f si toutes ses dérivées partielles du premier ordre s'annulent en ce point.

i.e $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$.

Exemple 1: Déterminer les pts critiques de la fct $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$.

sol: $f'_x(x, y) = 2x + 2y$

et $f'_y(x, y) = 2y + 2x$.

(2)

les pts critiques de f sont les solutions de

$$\begin{cases} 2x + \alpha y = 0 \\ \alpha x + 2y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

le determinant de ce système est $4 - \alpha^2 \neq 0$

Pour $\alpha \notin \{-2, 2\}$, l'unique sol est $(0, 0)$.

pour $\alpha = \pm 2$, il existe une infinité de pts critiques.

Définition 42: Soit f une fct de classe C^1 sur un ouvert U à valeur des $\mathbb{R}$.

(i) $x_0 \in D(f)$ est un maximum local de f s'il existe une boule $B(x_0, r)$ /

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in U \cap B(x_0, r)$$

(ii) x_0 est un minimum local de f si il existe $B(x_0, r)$ /

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in U \cap B(x_0, r)$$

Condition nécessaire

(3)

Propriété : si f présente un extremum local en x_0 , alors x_0 est un pt critique

Définition 3 : un pt critique de f qui n'est pas un extremum est appelé point de selle ou col.

Pour les fcts $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

• Une condition suffisante d'extremum local :

soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage d'un point critique x_0 .

• si la forme quadratique $H(u)$

$$= \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) u_i u_j \text{ est définie}$$

positive, alors f présente un minimum local en x_0 .

• Si $H(x)$ est définie négative, alors (4)
 f présente un maximum local en x_0 .

En pratique, $n=2$.

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0)$$

et $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0)$, où $x_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

La nature de x_0 est déterminée par
 le tableau suivant :

$\Delta = AC - B^2$	A	nature de x_0
+	+	minimum
+	-	maximum
-	+	point de selle
-	-	point de selle
0		?

Exemple : Déterminer les extremums de
la fct suivante : (5)

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) e^{-(x^2 + y^2)} \in C^\infty.$$

Solution : - points critiques de f

$$f_x(x, y) = 2x(1 - x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)} = 0$$

$$f_y(x, y) = -2y(1 + x^2 - y^2) e^{-(x^2 + y^2)} = 0$$

~~ssi~~ $f_x(x, y) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x^2 - y^2 = 1$

$f_y(x, y) = 0$ ssi $y = 0$ ou $x^2 - y^2 = -1$

si $x = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y^2 = 1$

$(0, 0), (0, 1), (0, -1)$

si $y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x^2 = 1$

$(0, 0), (1, 0), (-1, 0)$

Donc f possède 5 pts critiques

$(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$

② Les dérivées secondes de f sont, ⑥

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 2(2x^4 - 2x^2y^2 - 5x^2 + y^2 + 1)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = -2(2y^4 - 2x^2y^2 - 5y^2 + x^2 + 1)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = 4xy(x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

On a donc le tableau suivant.

Pt Critique	$\Delta = AC - B^2$	A	nature
$(0, 0)$	-4	2	Point de selle
$(0, \pm 1)$	$16e^{-2}$	$4e^{-1}$	minimum
$(\pm 1, 0)$	$16e^{-2}$	$-4e^{-1}$	maximum

Exemple 2, Soit $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$ (7)

Déterminer les pts critiques de f et
leurs nature

Solution : $f \in \mathbb{C}^2$

$$f'_x(x,y) = 6x^2 - 6x, \quad f'_y = 6y^2 + 6y$$

$$f''_{xx} = 12x - 6, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{yy} = 12y + 6$$

Les pts critiques vérifient :

$$f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$$

$$\begin{cases} 6x(x-1) = 0 \\ 6y(y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ou } x=1 \\ y=0 \text{ ou } y=-1 \end{cases}$$

$$x=0 \text{ et } y=0 \text{ ou } y=-1 \Rightarrow (0,0) \text{ et } (0,-1)$$

$$x=1 \text{ et } y=0 \text{ ou } y=-1 \Rightarrow (1,0) \text{ et } (1,-1)$$

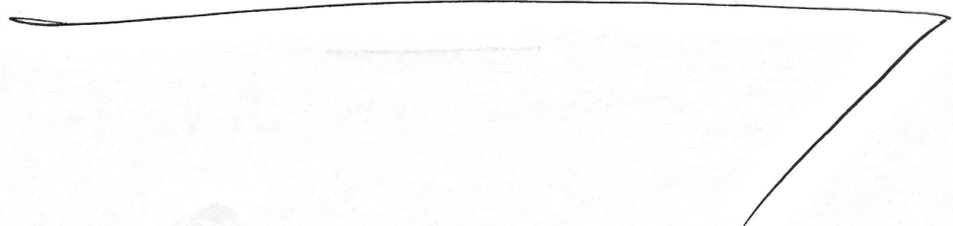
les pts critiques sont : $(0,0), (1,0), (0,-1), (1,-1)$

La Hessienne en un pt critique :

(8)

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x-6 & 0 \\ 0 & 12y+6 \end{pmatrix}$$

- En $(0,0)$ et en $(1,-1)$, le déterminant de H est négatif ($\det H < 0$) et le pt critique est un col (pas d'extremum local).
- En $(1,0)$, la forme quadratique est définie positive, et f a un minimum local égal à -1 .
- En $(0,-1)$, la forme quadratique est définie négative, et on a un maximum local égal à 1 .



Exercice (complémentaire)

(9)

$$1^o) f(x, y) = (x^2 + y) e^{2x - y}$$

$$2^o) f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$$

Les extremums de f

Indication : pour 1^o) pts entières : $(-1, 0)$

Pour 2^o) : les pts sont :

$$(\pi/6, \pi/6), (5\pi/6, 5\pi/6), (3\pi/2, 3\pi/2)$$

$$(\pi/2, \pi/2), (\pi/2, -\pi/2) \text{ et } (-\pi/2, \pi/2)$$

Théorème de fcts implicites de $\mathbb{R}^2$

f une application de classe $\mathcal{C}^1$

d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs de $\mathbb{R}$

Théorème : soit $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de U

tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \neq 0$

Alors, il existe un intervalle I de centre x_0 et un intervalle J de centre y_0 , tels que

$$i) \forall x \in I, \exists y = \varphi(x) \in J / f(x, y) = 0$$

10

$$ii) x \in I \longrightarrow y = \varphi(x) \in J \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I$$

$$\text{et } \varphi'(x) = - \frac{f'_x(x, \varphi(x))}{f'_y(x, \varphi(x))}$$

Exemple : soit $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy + y^2 - x + \frac{5}{3}$.

$$f \in \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

cherchons au voisinage de quels points on peut mettre $f(x, y) = 0$ sous la forme $y = \varphi(x)$

$$\text{on a } \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y.$$

Pour trouver les pts où $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, on résout

le système :

$$\begin{cases} \frac{x^3}{3} + xy + y^2 - x + \frac{5}{3} = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

qui admet une racine unique $y = -1$ et $x = -2$

Au voisinage de tout pt $(x, y) \neq (-2, 1)$.

on peut résoudre l'équation $f(x, y) = 0$

sous la forme $y = f(x) \in \mathcal{C}^1$

et on a :

$$\varphi'(x) = - \frac{x^2 + y - 1}{x + 2y}$$

Exemple 2 : Soit $f(x, y) = e^y \sin x + y(x+1)$

1°) Montrer que l'on peut résoudre
 $f(x, y) = 0$ au voisinage de $x_0 = 0$

2°) Donner la valeur de $\phi'(x)$.

3°) Calculer $\phi'(0)$ et $\phi''(0)$ et le développement
limité à l'ordre deux de ϕ à
l'origine.

Sol : $f \in \mathcal{C}^1$ au voisinage de $(0, 0)$.

et on a : $f'_x(x, y) = (\cos x) \cdot e^y + y$

$f'_y(x, y) = e^y (\sin x) + x + 1$.

$f(0, 0) = 0$ et $f'_y(0, 0) = 1 \neq 0$.

il existe une fct $x \rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{C}^1$
sur un voisinage de $x=0$ et tel q-

$$f(x, \varphi(x)) = 0$$

En dérivant, $f(x, \varphi(x)) = 0$

on obtient $e^{\varphi(x)} \sin x + (x+1) \varphi'(x) = 0$

$$(\cos x) \cdot e^{\varphi(x)} + (\sin x) \varphi'(x) e^{\varphi(x)} + \varphi(x) + (x+1) \varphi'(x) = 0 \quad (1)$$

soit $1 + \varphi'(0) = 0 \Rightarrow \varphi'(0) = -1$

Une nouvelle dérivation de (1) donne :

$$(\cos x) \cdot \varphi'(x) e^{\varphi(x)} - (\sin x) e^{\varphi(x)} + (\cos x) \varphi'(x) e^{\varphi(x)} + \sin x e^{\varphi(x)} (\varphi''(x) + \varphi'(x))$$

$$+ 2 \varphi'(x) + \varphi''(x) (x+1) = 0$$

on obtient $\varphi''(0) = 4$

le dev. limité de φ est donc

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \varphi'(0) + \frac{x^2}{2!} \varphi''(0) + x^2 \varepsilon(x)$$

$$= -x + 2x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

Exercice 1, Soit $f(x, y) = ye^x + \sin y + x$

13

- 1°) Montrer qu'il existe une fct $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $x=0$.
Vérifiant $\varphi(0)=0$ et $f(x, \varphi(x))=0$.
- 2°) Donner le développement limité à l'ordre deux de φ au voisinage de 0.
-

Exercice 2, Soit $f(x, y, z) = x^2y + e^x + z$

- 1°) Vérifier que $f(0, 1, -1) = 0$, et montrer qu'il existe une fct $g \in \mathcal{C}^1$ au voisinage de $(1, -1) \in \mathbb{R}^2$ / $g(1, -1) = 0$
et $f(g(y, z), y, z) = 0$
- 2°) Calculer le gradient de g au pt $(1, -1)$.
-

Corrigé (Ex2), 1°) $f(0, 1, -1) = 1 - 1 = 0$

et $f \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. et les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + e^x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1.$$

au pt $(0, 1, -1)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1, -1) \neq 0$.

(14)

Il existe un voisinage de $(1, -1)$ / $x = g(y, z)$

$$\text{et } g(1, -1) = 0$$

$$\text{v) } f(g(y, z), y, z) = 0 \text{, par dérivation / y et z}$$

on obtient :

$$f'_x \cdot g'_y + f'_y = 0$$

$$f'_x \cdot g'_z + f'_z = 0$$

$$\Rightarrow g'_y(1, -1) = - \frac{f'_y(0, 1, -1)}{f'_x(0, 1, -1)} = 0$$

$$\text{et } g'_z(1, -1) = - \frac{f'_z(0, 1, -1)}{f'_x(0, 1, -1)} = -1$$

$$g(1, -1) = (0, -1)$$

