Exercice 05

Rappels :

Définition 01 :

Le Noyau d'une application linèaire $f : E \to F$ est l'ensemble noté par :

$$\ker(f) = \{x \in E, f(x) = 0_E\} \subset E \tag{1}$$

Définition 02 :

L'image d'une application linèaire $f : E \to F$ est l'ensemble noté par :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \{y \in E, \exists x \in E \text{ telque } y = f(x)\} \\ &= f(E) = \{f(x), x \in E\} \end{aligned} \tag{2}$$

Solution

Montrons que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = f(\ker(f \circ f))$

- D'abord, on doit prouver la première inclusion c'est-à-dire :

$$\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset f(\ker(f \circ f)),$$

Solution

Montrons que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = f(\ker(f \circ f))$

- D'abord, on doit prouver la première inclusion c'est-à-dire :

$$\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset f(\ker(f \circ f)),$$

on prend un élèment y dans $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$:

soit $y \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) \Rightarrow y \in \ker(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$

Solution

Montrons que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = f(\ker(f \circ f))$

- D'abord, on doit prouver la première inclusion c'est-à-dire :

$$\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) \subset f(\ker(f \circ f)),$$

on prend un élèment y dans $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$:

soit $y \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) \Rightarrow y \in \ker(f)$ et $y \in \operatorname{Im}(f)$
D'après la formule (1) on a :

$$y \in \ker(f) \Rightarrow f(y) = 0,$$

et d'après la formule (2) on a :

$$y \in \operatorname{Im}(f), \exists x \in E \text{ telque } y = f(x).$$

Solution

De plus,

$$f(f(x)) = f \circ f(x) = f(y) = 0 \Rightarrow x \in \ker(f \circ f)$$

ce qui implique que :

$$f(x) \in f(\ker(f \circ f)),$$

et comme $y = f(x)$,on trouve:

$$y \in f(\ker(f \circ f)).$$

D'où la première inclusion.

Solution

- Ensuite, on va prouver la 2ème inclusion c'est-à-dire :

$$f(\ker(f \circ f)) \subset \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f).$$

D'après la formule (1), on déduit :

$$\ker(f \circ f) \subset E,$$

et

$$f(\ker(f \circ f)) \subset f(E),$$

d'après la définition (2), on a :

$$f(E) = \mathrm{Im}(f) \;\Rightarrow f(\ker(f \circ f)) \subset \mathrm{Im}(f) \tag{3}$$

- Maintenant, si on prend un élèment $y \in f(\ker(f \circ f))$, et d'après la première définition,

$$y \in f(\ker(f \circ f)) \Rightarrow \exists x \in \ker(f \circ f) \text{ telque } y = f(x)$$

et

$$f \circ f(x) = 0 \Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow y \in \ker(f),$$

on trouve :

$$f(\ker(f \circ f)) \subset \ker(f) \tag{4}$$

De (3) et (4), on déduit la 2ème inclusion.