Module de Pobabilités 2
Chapitre 2 : processus de renouvellement (suite)
Séance 7

Responsable du cours: Dr. **Metiri Farouk,**
Université de Badji Mokhtar -Annaba-

Mail address: fmetiri@yahoo.fr

Chapitre 2 (la suite): Séance 07

Proposition 2.2: Supposons que $\mu = E[X] =$ La durée moyenne d'attente et $\sigma^2 = var(X)$ existent. Si $\sigma \neq 0$, On a la suite $(N_t)_{t \geq 0}$ **converge en loi** vers $\mathbb{N}\left(\frac{t}{\mu}, \frac{t\sigma^2}{\mu^3}\right)$.

Preuve:

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons Pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$:

$$Z_t = \frac{t}{\mu} + x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}$$

La suite $(N_t)_{t \geq 0}$ **converge en loi** vers $\mathbb{N}\left(\frac{t}{\mu}, \frac{t\sigma^2}{\mu^3}\right)$ signifie d'une manière équivalente que la v.a:

$$\frac{N_t - \text{sa moyenne}}{\text{son écart type}} = \frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} \to^L \mathbb{N}(0,1)$$

Il en résulte que:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < x\right) &= P\left(N_t < \frac{t}{\mu} + x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}\right) \\ &= P\left(N_t < Z_t\right) = P\left(T_{Z_t} > t\right) \\ \text{comme la relation du cours} &: \quad \forall n \geq 0,\ P\left(N_t \geq n\right) = P\left(T_n \leq t\right) \end{aligned}$$

Où les instants d'occurences $T_{Z_t} = X_1 + X_2 + ... + X_{Z_t}$ = La somme des durées d'attente qui sont des v.a indépendantes et identiquement distribuées.

En utilisant les propriétés du théorème central limite: on a la suite:$Y_n = \frac{T_{Z_t} - Z_t\mu}{\sigma\sqrt{Z_t}}$ converge en loi vers une v.a. de loi $\mathbb{N}(0,1)$.

$$
\begin{aligned}
P\left(T_{Z_t} > t\right) &= P\left(\frac{T_{Z_t} - Z_t\mu}{\sigma\sqrt{Z_t}} > \frac{t - Z_t\mu}{\sigma\sqrt{Z_t}}\right) \\
&= P\left(\frac{T_{Z_t} - Z_t\mu}{\sigma\sqrt{Z_t}} > \frac{t - t - x\sigma\mu\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu} + x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}}\right) \\
&= P\left(\frac{T_{Z_t} - Z_t\mu}{\sigma\sqrt{Z_t}} > \frac{-x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu} + x\sigma^2\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}}\right)
\end{aligned}
$$

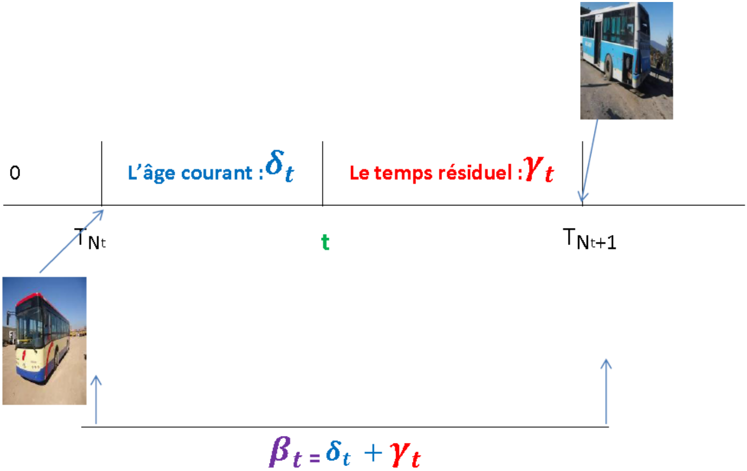
$$
\begin{aligned}
&= P\left(\frac{T_{Z_t}-Z_t\mu}{\sigma\sqrt{Z_t}} > \frac{-x\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu}+\frac{\sigma^2 \mathrm{t}}{\sqrt{\mu^2}}x\frac{\sigma}{\mathrm{t}}\sqrt{\frac{t}{\mu}}}}\right)\\
&= P\left(\frac{T_{Z_t}-Z_t\mu}{\sigma\sqrt{Z_t}} > \frac{-x}{\sqrt{1+\frac{x\sigma}{\sqrt{t\mu}}}}\right) =^{\lim_{t\longrightarrow\infty}} P\left(Y_n > -x\right)\\
&= P\left(Y_n < x\right) : \text{ fct de répartition}
\end{aligned}
$$

N.B: $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-x}{\sqrt{1+\frac{x\sigma}{\sqrt{t\mu}}}}\right) = \frac{-x}{\sqrt{1+\frac{x\sigma}{\infty}}} = \frac{-x}{\sqrt{1+0}} = -x.$

Donc, On déduit que La v.a $P\left(\frac{N_t-\frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < x\right) = P(\frac{T_{Z_t}-Z_t\mu}{\sigma\sqrt{Z_t}} < x)$

$=P\left(Y_n < x\right)$ ce qui prouve que la suite $(N_t)_{t\geq 0}$ **converge en loi** vers $\mathbb{N}\left(\frac{t}{\mu}, \frac{t\sigma^2}{\mu^3}\right)$.

Temps résiduel et Temps courant:



Nous donnons quelques définitions usuelles concernant les processus de renouvellement. Il s'agit des temps résiduel, courant, et temps total courant:

Definition

Pour tout $t \geq 0$, on définit:

- le temps résiduel courant: $\gamma_t = T_{N_t+1} - t$
- l'âge courant: $\delta_t = t - T_{N_t}$
- le temps total courant: $\beta_t = T_{N_t+1} - T_{N_t}$

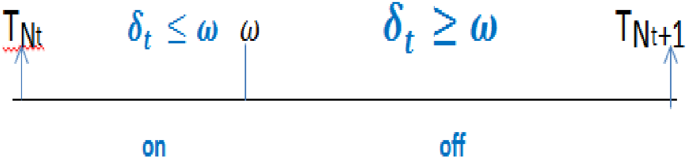
associés à un processus de renouvellement donné.

- Le temps résiduel courant γ_t à l'instant t est le temps qu'il reste à attendre pour la prochaine occurrence du processus. En guise d'illustration, il s'agit du temps que l'on passe à l'arrêt dans la gare des bus lorsque l'on arrive à l'instant t (dans cet exemple, une occurrence est représentée par l'arrivée d'un bus).
- L'âge courant δ_t est la durée séparant la date courante t de la dernière occurrence du processus.
- Donc, le temps total courant est la **somme des deux temps précédents:**

$$\beta_t = \gamma_t + \delta_t = T_{N_t+1} - T_{N_t} = X_{N_t+1}$$

1) Quelle est la densité de l'âge courant δ_t?

On suppose que nous sommes intéressés par la proportion du temps où l'âge courant du processus de renouvellement est inférieur ou égal à une constante w $(\delta_t \leq w)$. Pour ce faire, on considère un intervalle de temps
entre deux renouvellements (deux occurences). On dit que le système est **on** à l'instant t si l'âge courant $\delta_t \leq w$ à
l'instant t, et il est **off** dans le cas contraire $(\delta_t > w)$. En d'autres termes, le système est **on** dans les premières w unités
de temps de l'intervalle et il est **off** dans le reste de l'intervalle.


T_{N_t}
$\delta_t \leq \omega$
ω
$\delta_t \geq \omega$
T_{N_t+1}
on
off

D'aprés les hypothèses du processus de renouvellement alternatif, on obtient la quantité suivante:

$$\begin{aligned}
f_W(\omega) &= \text{La proportion du temps où } \delta_t \leq w \\
&= \frac{E\left[\text{ le } \textbf{on-time} \text{ dans l'intervalle}\right]}{E\left[\text{la longueur de l'intervalle}\right]} \\
&= \frac{E\left[\text{ le } \textbf{on-time} \text{ dans l'intervalle}\right]}{\left[\text{ le } \textbf{on-time} \text{ dans l'intervalle}\right] + \left[\text{ le } \textbf{off-time} \text{ dans l'intervalle}\right]} \\
&= \frac{E\left[\min(X, w)\right]}{E\left[X\right]} = \frac{\int_0^\infty P\left(\min(X, w) > x\right) dx}{E\left[X\right]} \\
&= \frac{\int_0^w P\left(X > x\right) dx}{E\left[X\right]} = \frac{\int_0^w (1 - P\left(X \leq x\right)) dx}{E\left[X\right]} \\
&= \frac{\int_0^w (1 - F(x)) dx}{\mu} = \frac{1 - F_X(w)}{\mu}
\end{aligned}$$

N.B : On a utilisé la propriété suivante des espérances:

$$E[Z] = \int_0^{\infty} P(Z > x)\, dz = \int_0^{\infty} 1 - P(Z \leq x)\, dz = \int_0^{\infty} 1 - F_Z(x) dz$$

(2) Quelle est la densité du Temps résiduel γ_t?

On suppose que nous sommes intéressés par la proportion du temps où la durée d'attente entre l'instant t et la nouvelle occurence T_{N_t+1} est inférieure à la constante y (Le temps résiduel:$\gamma_t < y$) . Ainsi, si on applique les hypothèses du processus de renouvellement alternatif (**on-time** et **off-time**), on peut considérer que:

- Le système est **on** si le temps résiduel courant du processus de renouvellement est supérieur ou égal à y $(\gamma_t > y)$

et Il est **off** dans le cas contraire $(\gamma_t < y)$.

- En d'autres termes, à chaque fois qu'un renouvellement se produit, le processus est **on** et il retse **on** jusqu'au dernières y unités du temps où il devient **off** jusqu'a la nouvelle occurence T_{N_t+1}.


T_Nt
γ_t ≥ y
y
γ_t ≤ y
T_Nt+1
on
off

Donc la variation du **off-time** où γ_t est inférieur à Y est égale à:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{E\left[\text{ le } \textbf{off-time} \text{ dans l'intervalle}\right]}{E\left[\text{la longueur de l'intervalle}\right]} \\
&= \frac{E\left[\text{ le } \textbf{off-time} \text{ dans l'intervalle}\right]}{E\left[\text{ le } \textbf{off-time} \text{ dans l'intervalle}\right] + E\left[\text{ le } \textbf{on-time} \text{ dans l'intervalle}\right]}
\end{aligned}
$$

Si X représente la longueur de l'intervalle de renouvellement, le système est **off** dans les dernières unités y de cet intervalle, il en résulte que le **off-time** sera égal à $\min(X, y)$

Ainsi, on peut obtenir cette variation qui est une densité du temps résiduel $f_Y(y)$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{E\left[\text{ le temps off dans l'intervalle}\right]}{E\left[\text{la longueur de l'intervalle}\right]} = \frac{E\left[\min(X,y)\right]}{E\left[X\right]} \\ &= \frac{\int_0^{\infty} P\left(\min(X,y) > x\right) dx}{E\left[X\right]} \\ &= \frac{\int_0^{y} P\left(X > x\right) dx}{E\left[X\right]} = \frac{\int_0^{y} (1 - F(x)) dx}{E\left[X\right]} \\ &= \frac{\int_0^{y} (1 - F(x)) dx}{\mu} = \frac{1 - F_X(y)}{\mu} \end{aligned}$$

Où F représente la fonction de répartition de la v.a X (durée d'inter-arrivées=durée d'attente entre deux occurences)

Exercice 2.4:

Considérons un processus de renouvellement où les durées de vie X sont des v.a de loi $U(a;b)$ où $0 < a < b$.

(1) Déterminez les fonctions de densité de la vie résiduelle, de la vie courante et de la vie totale de l'objet en place au moment de l'observation du système.

(2) Calculez les espérances de ces trois variables aléatoires.

Exercice 2.5:
On suppose que la durée de vie (en heures) d'une ampoule de projecteur suit une loi uniforme $(5;9)$. Pour projeter un documentaire qui durera 1.5 heures, nous utilisons un projecteur où l'état de l'ampoule est supposé stationnaire.
(1) Quelle est la probabilité que nous n'ayons pas à remplacer l'ampoule au cours de la projection?

Solution 2.4:

Soit X la durée de vie d'un objet X est de loi $U(a,b)$; ce qui mplique que:

$$\mu = E\left[X\right] = \frac{a+b}{2},$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ si} & a < x \leq b \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}$$

La fonction de densité de la durée de **vie résiduelle** Y de l'objet en place au moment de l'observation est:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\left(1 - F_X(y)\right) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{a+b}\left(1-0\right) = \frac{2}{a+b} & \text{si } 0 \leq y \leq a \\ \frac{2}{a+b}\left(1 - \frac{y-a}{b-a}\right) = 2\frac{b-y}{b^2-a^2} & \text{si } a < y \leq b \\ \frac{2}{a+b}\left(1-1\right) = 0 & \text{si } y > b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$E\left[Y\right] = \int_0^b y f_Y(y) dy = \int_0^a y \frac{2}{a+b} dy + 2\int_a^b y \frac{b-y}{b^2-a^2} dy = \frac{1}{3}\frac{a^2+b^2+ba}{a+b}$$

La fonction de densité de la durée de vie courante W de l'objet en place au moment de l'observation est la même que Y d'où:

$$f_W(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{a+b}(1-0) \;= \frac{2}{a+b} & \text{si } 0 \leq \omega \leq a \\ \frac{2}{a+b}\left(1 - \frac{\omega-a}{b-a}\right) = 2\frac{b-\omega}{b^2-a^2} & \text{si } a < \omega \leq b \\ \frac{2}{a+b}(1-1) = 0 & \text{si } \omega > b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$E[W] = \frac{1}{3}\frac{a^2+b^2+ba}{a+b}$$

Enfin, La fonction de densité de la durée de vie totale V de l'objet en place au moment de l'observation est:

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} v \; f_X(v) & \text{si } v > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{a+b} v \; \frac{1}{b-a} = \frac{2v}{b^2-a^2} & \text{si } a < v \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$E[V] = \int_a^b v f_v(V) dv = \int_a^b v \frac{2v}{b^2 - a^2} dv = \frac{2}{3} \frac{a^2 + b^2 + ba}{a + b}$$

Solution 2.5:

Ne pas remplacer l'ampoule au cours de la projection du documentaire revient à dire que le temps restant pour l'ampoule avant de la remplaçer sera supérieur à 1.5 heures. Autrement dit, le temps résiduel est supérieur à 1.5 heures (Le système est **on**). Nous cherchons $P[Y > 1.5]$ où Y représente l'âge résiduel de l'ampoule en place. Puisque la durée de vie X d'une ampoule est de loi $U(5;9)$, alors:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9-5} = \frac{1}{4} \text{ si } \quad 5 < x \leq \ 9 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases},$$

$$\mu = E[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{5+9}{2} = 7,$$

et

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x \leq 5 \\ \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-5}{4} \text{ si } \quad 5 < x \leq \ 9 \\ 1 \text{ si } x > 9 \end{cases}$$

Déterminons la densité du temps résiduel:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\left(1 - F_X(y)\right) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{7}(1-0) = \frac{1}{7} \text{ si } 0 \leq y \leq 5 \\ \frac{1}{7}\left(1 - \frac{y-5}{4}\right) = \frac{9-y}{28} \text{ si } 5 < y \leq 9 \\ \frac{1}{7}\left(1-1\right) = 0 \text{ si } y < 0 \text{ ou } y > 9 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{7} \text{ si } 0 \leq y \leq 5 \\ \frac{9}{28} - \frac{y}{28} \text{ si } 5 < y \leq 9 \\ 0 \text{ si } y < 0 \text{ ou } y > 9 \end{cases}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} P[Y &> 1.5] = 1 - P[Y \leq 1.5] = 1 - \int_0^{1.5} f_Y(y)dy = 1 - \int_0^{1.5} \frac{1}{7}dy \\ &= 1 - \frac{3}{14} = \frac{11}{14} = 0.7857 = 78,57\%. \end{aligned}$$

Bon courage