# Modélisation (MMC)

Chapitre 2: Efforts dans un milieu continu

Lahcène CHORFI
Dept. de Maths, Université B.M. d' Annaba

13 Avril 2020

# Table des matières

# Chapitre 1

# Déformation d'un milieu continu

# Chapitre 2

# Efforts dans milieu continu

## 2.1 Loi de conservation

### 2.1.1 Conservation de la masse. Equation de continuité

Rappel des notations

- $x = \phi(X,t)$, $V(x,t) = \frac{\partial \phi}{X,t}$ camp de vitesse eulerien
- $D(t)$ domaine transporté par le mouvement , $D_0 = D(0)$
- $\rho(x,t)$ la masse volumique.
- $m(D(t)) = \iiint_{D(t)} \rho(x,t)dx$ masse
- La loi de conservation de masse $m(D(t)) = m(D_0)$ entraîne

$$\forall t, \quad \frac{d}{dt} m(D(t)) = 0$$

- Le théorème de transport entraîne, pour tout $t$

$$\iiint_{D(t)} [\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho V)]dx$$

d'où l'équation de continuité

$$\forall t, \ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho V) = 0 \Leftrightarrow \tag{2.1}$$

**Remarque 1**

○ *De plus nous avons les relations :*

$$\mathrm{Div}(\rho V) = \rho \mathrm{Div}\ V + V\ .\ \mathrm{Grad}\ \rho, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \mathrm{Grad}\ \rho$$

*On obtient ainsi une autre forme locale de l'equation de continuite :*

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathrm{Div}\ V = 0$$

○ *Si* Div $V = 0$ *alors*

$$\frac{1}{\delta \mathcal{V}} \frac{d}{dt}(\delta \mathcal{V}) = \mathrm{Div}\ V(x,t) = 0 \Rightarrow \delta \mathcal{V} = \delta \mathcal{V}_0 \quad (\textit{milieu incompressible})$$

*de plus on a*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \mathrm{Grad}\ \rho = 0 \Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (\ \textit{dérivée particulaire nulle})$$

*Ce qui signifie que la densité de masse est constante le long des trajectoires.*

### 2.1.2 Loi de conservation de la quantité de mouvement

- $P(t) = \iiint_{D(t)} \rho V dx$ quatité de monvement
- Loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{dP}{dt} = F_{tot}(D(t)) := F_{ext}(D) + F_{cont}(D) \tag{2.2}$$

avec

$$F_{ext}(D) = \iiint_{D(t)} f(x,t) dx, \quad F_{cont}(D) = \iiint_{\partial D(t)} T(x,n) ds \tag{2.3}$$

où $f(x,t)$ est une densité de force appliquée à une particule (élément de volume) et $T(x,n)$ est une force de contact (pression) appliquée à un élément de surface orienté par la normale $n(x)$, $x \in \partial D$.

**Tenseurs de contraintes**

On a le théorème suivant

**Théorème 1** *(de Cauchy) Il existe un tenseur (d'ordre 2) $\sigma(x,t) = (\sigma_{ij}(x,t))$ tel que, pour tout $(x,t)$, on ait*

$$T(x,t,n) = \sigma(x,t)n$$

**Preuve.** On peut trouver la preuve de ce théorème dans le livre [6]. La preuve utilise la méthode du tétraèdre qui consiste à appliquer la relation fondamentale de la dynamique à un tétraèdre infinitésimal de sommet $M$, puis on écrit le bilan des forces appliquées au facettes. Le tenseur $\sigma$ est symétrique: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. □

**Retour à la loi fondamentale (2.2)**

L'équation (2.2) s'écrit

$$\frac{dP}{dt} = \iint_{\partial D(t)} \sigma(x,t)\ .\ nds + \iiint_{D(t)} f(x,t)dx$$

La formule de Gauss nous donne

$$\iint_{\partial D(t)} \sigma(x,t)\ .\ nds = \iiint_{D(t)} \text{Div } \sigma dx$$

d'où

$$\frac{dP}{dt} = \iiint_{D(t)} \text{Div } \sigma dx + \iiint_{D(t)} f(x,t)dx \qquad (2.4)$$

**Rappel:** Soit l'intégrale d'un champ de vecteurs $F(x,t) = (F_1,F_2,F_3)$

$$\mathrm{F}(t) = \iiint_{D(t)} F(x,t)dx$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{F}}{dt} &= \iiint_{D(t)} [\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + \text{Div } (F \otimes V)]dx \\ &= \iiint_{D(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)dx + \iint_{\partial D(t)} (F \otimes V)\ .\ nds\end{aligned}$$

Avec $F = \rho V$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= \iiint_{D(t)} [\frac{\partial(\rho V)}{\partial t}(x,t) + \text{Div } (\rho V \otimes V)]dx \\
&= \iiint_{D(t)} \frac{\partial(\rho V)}{\partial t}(x,t)dx + \iint_{\partial D(t)} \rho V(V\ .\ n)ds
\end{aligned}
$$

comme

$$
\begin{aligned}
\text{Div } (\rho V \otimes V) &= V\text{Grad } (\rho V) + \rho V\text{Div } V \\
&= \rho V\text{Grad } V + V\text{Div } (\rho V)
\end{aligned}
$$

d'où l'équation

$$
\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + V\text{Grad } (\rho V) + \rho V\text{Div } V = f + \text{Div } \sigma
$$

Si la masse est conservée, l'équation de continuité

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho V) = 0
$$

entraîne

$$
\rho\left[\frac{\partial V}{\partial t} + (\text{Grad } V)V\right] = f + \text{Div } \sigma \quad \text{(Equation du mouvement)} \tag{2.5}
$$

équivalente à

$$
\rho\frac{DV}{Dt} = f + \text{Div } \sigma
$$

## 2.2 Loi de conservation de l'énergie: premier principe de la termodynamique

$D(t)$ domaine transporté par le mouvement $x = \phi(t,X)$

$$
\mathcal{E}_{tot}(D(t)) = \iiint_{D(t)} \rho(\frac{1}{2}V^2 + e)dx \tag{2.6}
$$

- $\iiint_{D(t)} \rho(\frac{1}{2}V^2)dx$ énergie cinétique
- $e$ énergie interne

$1^{er}$ **Principe de la thermodynamique:**

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = \mathcal{P}_{ext}(D(t)) + \mathcal{P}_{the}(D(t)) \tag{2.7}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{the}(D(t)) &= \iint_{\partial D(t)} Q(x,t)nds + \iiint_{D(t)} r(x,t)dx \\ Puissance\ thermique &= flux\ de\ chaleur + source\ de\ chaleur \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\mathcal{P}_{the}(D(t)) = \iiint_{D(t)} (-\text{Div } Q + r(x,t))dx \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ext}(D(t)) &= \iint_{\partial D(t)} (\sigma V)nds + \iiint_{D(t)} f\ .\ Vdx\ \ (Puissace\ des\ forces\ exterieures) \\ &= \iiint_{D(t)} (\text{Div } (\sigma\ .\ V) + f\ .\ V)dx \end{aligned} \tag{2.10}$$

On applique le théorème de transport au champs scalaire $c(x,t) = \rho(\frac{1}{2}V^2 + e)$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}_{tot}(t) = \iiint_{D(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\frac{1}{2}V^2 + \rho e) + \text{Div } (\rho\frac{V^2}{2}V + \rho eV)\right] dx \tag{2.11}$$

De (2.9), (2.10) et (2.11) on déduit l'équation différentielle (loi locale)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\frac{V^2}{2} + \rho e) + \text{Div } (\rho\frac{V^2}{2}V + \rho eV - \sigma\ .\ V + Q) = f\ .\ V + r \tag{2.12}$$

En tenant compte de l'équation de contuinité, on peut simplifier cette équation et avoir

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + V\text{Grad } e\right) = r - \text{Div } Q + \sigma : D \tag{2.13}$$

Qu'on peut écrire

$$\rho\frac{De}{Dt} = r - \text{Div } Q + \sigma : D \tag{2.14}$$

où $D(x,t) = D_{ij}$ est le tenseur du taux de déformation

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i})$$

et $\sigma : D = (\sigma_{ij} D_{ji})$ est le produit contracté.
Pour plus de détails, voir [1] ou ([6], chap. 7)
En plus de ces équations, on utilise

- la loi d'état : $\rho = \mathcal{P}(p,e)$, $e = \mathcal{E}(\rho,T)$, avec p=pression et T=température
- Loi de Fourier $Q = -k\nabla T$
- Loi de comportement: $\sigma = \mathcal{G}(\varepsilon)$ où $\varepsilon = \varepsilon_{ij}$ est le tenseur de déformation

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$$

# Bibliographie


[1] 0. Thual, Introd. MMC Déformables (Polytech, 1977)

[2] J. Salençon, MMC, Ed. Ecole Polytech, Paris (2007)

[3] F. Goley et S. Bonelli, MMC (ISITV, 2011)

[4] MMC, Arts et Métiers, Paris-Tech (2013)

[5] S. DEGHBOUDJ, Mécaniques des Milieux continus Cours et Applications, Université Larbi Tébessi de Tébessa, Département de Génie Mécanique
https://www.researchgate.net/publication/311909114

[6] J. Coirier et C. Nadot-Martin, MMC, Science Sup, Dunod (3ème edition)(2007).