Université Badji Mokhtar, Annaba	T. C. M. I.
Faculté des Sciences	Semestre 2
Mathématiques et Informatique	2019/2020

Corrigé série 2

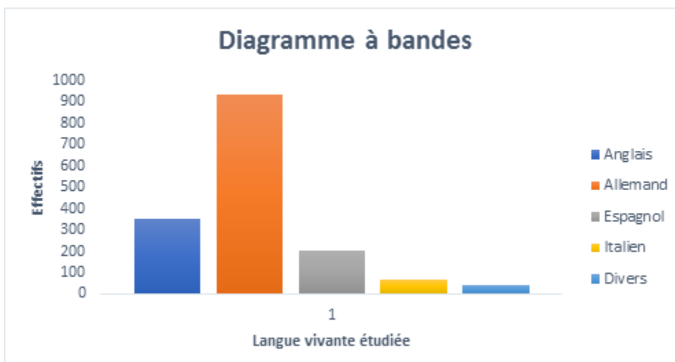
Exercice 1 *a) La population : 1600 élèves d'un lycée.*

Le caractère : la langue vivante étudiée.

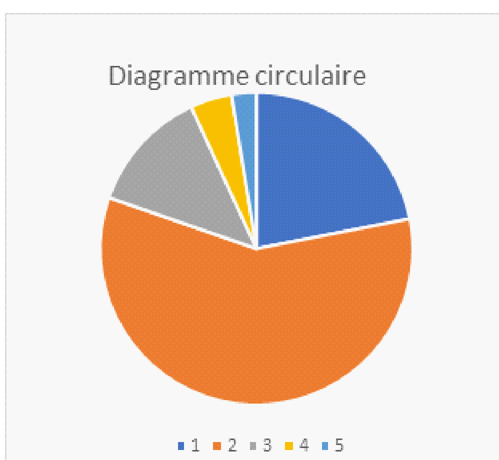
Nature du caractère : qualitatif nominal.

b) Ce caractère peut être représenté graphiquement par :

- *Diagramme à bandes*



- *Diagramme circulaire*



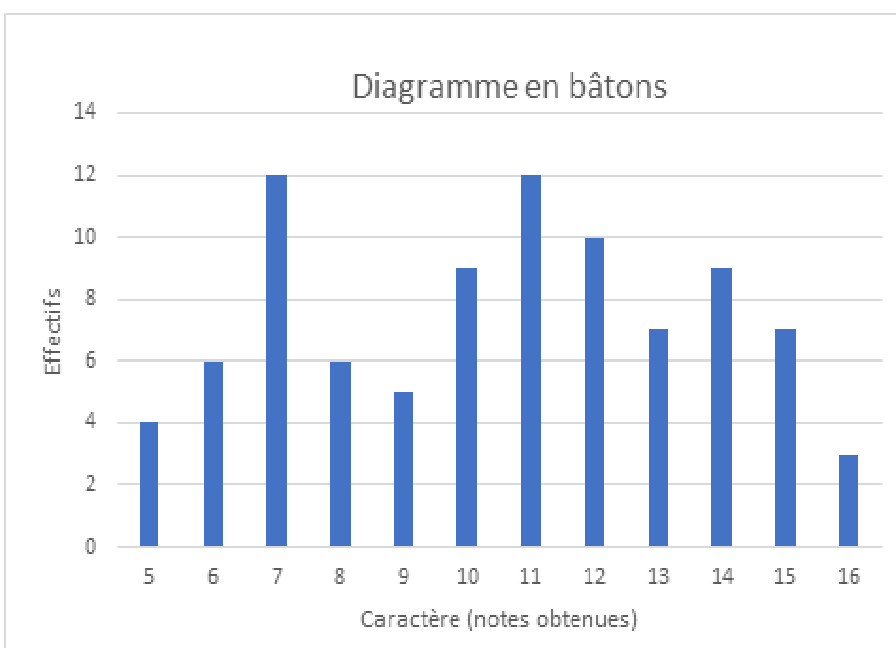
Exercice 2 *1. Nature du caractère : quantitatif discret.*

2. On commence d'abord par ordonner la série statistique dans l'ordre croissant : $5_{(4)}; 6_{(6)}; 7_{(12)}; 8_{(6)}; 9_{(5)}; 10_{(9)}; 11_{(12)}; 12_{(10)}; 13_{(7)}; 14_{(9)}; 15_{(7)}; 16_{(3)}$.

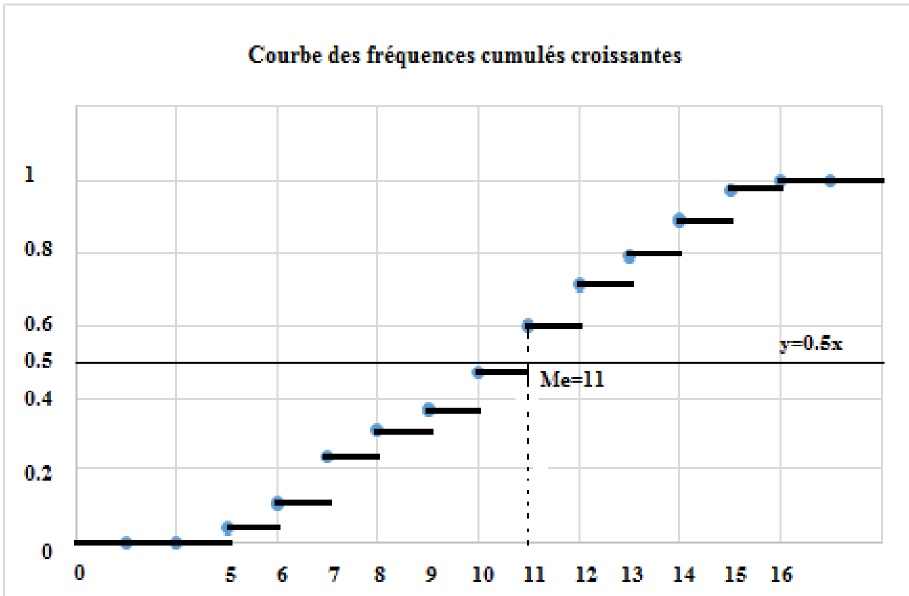
Tableau statistique :

Notes X	*Effectifs* n_i	*Fréquences* f_i	*Eff. cum. croissants* $n_i \uparrow$	*Eff. cum. décroissants* $n_i \downarrow$	*Fréq. cum. croissants* $f_i \uparrow$	$n_i x_i$
5	4	0.04	4	90	0.04	20
6	6	0.07	10	86	0.11	36
7	12	0.13	22	80	0.24	84
8	6	0.07	28	68	0.31	48
9	5	0.06	33	62	0.37	45
10	9	0.10	42	57	0.47	90
11	12	0.13	54	48	0.60	132
12	10	0.11	64	36	0.71	120
13	7	0.08	71	26	0.79	91
14	9	0.10	80	19	0.89	126
15	7	0.08	87	10	0.97	105
16	3	0.03	90	3	1	48
Total	90	1				945

a) Représentation des effectifs par le diagramme en bâtons



b) Courbe des fréquences cumulées :



4. *Le mode est l'observation qui a le plus grand effectif, la série statistique possède deux modes :*

   $Mo_1 = 7$ *et* $Mo_2 = 11$. *On dit alors que la série statistique est bimodale.*

   La moyenne arithmétique $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{12} n_i x_i = \frac{945}{90} = 10,5$.

5. *On a* $n = 90 = 2 \times p$ *où* $p = 45$ *alors la médiane* $Me = Q_2 = \frac{x_p + x_{p+1}}{2} = \frac{x_{45} + x_{46}}{2} = \frac{11+11}{2} = 11$.

   Graphiquement nous pouvons déterminer la médiane on déterminant le point d'intersection de la droite d'équation $y = 0.5$ *avec la courbe des fréquences cumulées croissantes.*

Exercice 3

1. *La population : les 31 jours du mois de janvier*

   Le caractère étudié : la température journalière (en °C)

   Nature du caractère : quantitatif continu

2. *Etendue de la série : pour le déterminer il faut d'abord ordonner la série dans le sens croissant*

   $8.8 - 9.1 - 9.4 - 9.9 - 10.0 - 10.2 - 10.4 \| \; 10.7 - 10.8 - 11.4 - 11.8 - 11.9 \|$
   $12.5 - 12.6 - 12.9 - 13.3 - 13.6 - 13.6 \| \; 14.2 - 14.2 - 14.3 - 14.5 - 14.9 -$
   $15.3 - 15.6 - 15.6 - 15.8 \| \; 16.2 - 16.8 - 17.0 - 17.6$

D'où $e = x_{max} - x_{min} = 17.6 - 8.8 = 8.8$.

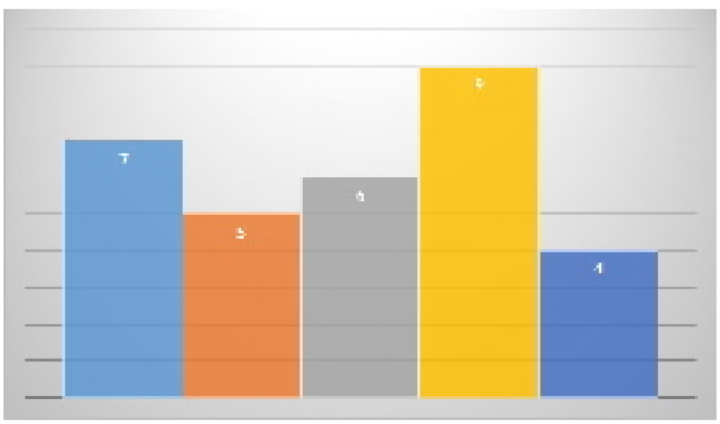
Nombre de classes : $K = \sqrt{31} \simeq 5.57$. *On opte pour* 5 *classes.*

Amplitude : $a = \frac{8.8}{5} \simeq 1.76 \simeq 1.8$.

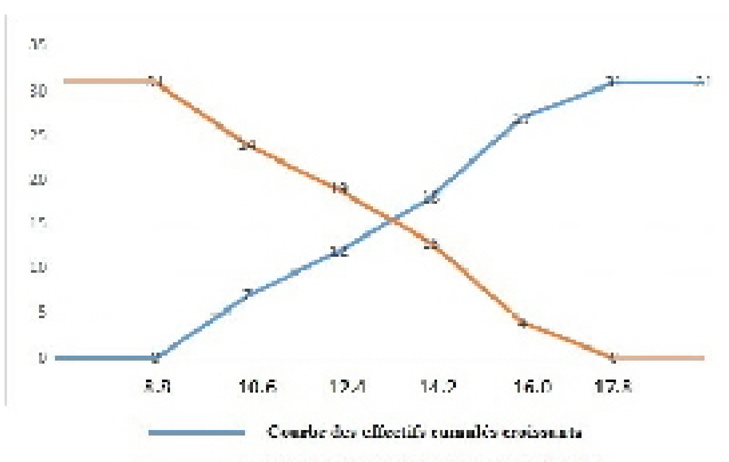
3. *Tableau statistique*

Classes	*Centre*	*Effectif*	*Fréquences*	*Pourcentage*	$n_i^c \uparrow$	$n_i^c \downarrow$
$[8.8; 10.6[$	9.7	7	0.2258	22.58	7	31
$[10.6; 12.4[$	11.5	5	0.1613	16.13	12	24
$[12.4; 14.2[$	13.3	6	0.1936	19.36	18	19
$[14.2; 16[$	15.1	9	0.2903	19.35	27	13
$[16; 17.8[$	16.9	4	0.1290	19.35	31	4
Total		31	1	100		

4. *Représentations graphiques*



Histogramme des températures du mois de janvier



5. *La classe modale est* $[14.2; 16[$ *et* $Mo = 15.1$.

La moyenne : $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} n_i x_i = \frac{408.7}{31} = 13.18°C$.

La médiane : On a $\frac{n}{2} = 15.5 \leq n_i^c = 18$ *alors* $Me \in [12.4; 14.2[$. *À l'aide d'une interpolation on obtient :*

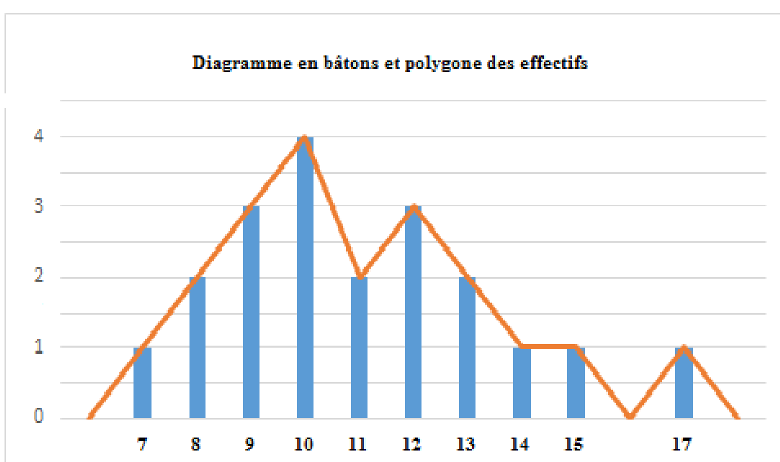
$$\frac{Me - 12.4}{14.2 - 12.4} = \frac{15.5 - 12}{18 - 12}$$

Alors $Me = 12.4 + 1.8 \cdot 0.5833 = 12.5 + 1.0499 \simeq 13.45°C$.

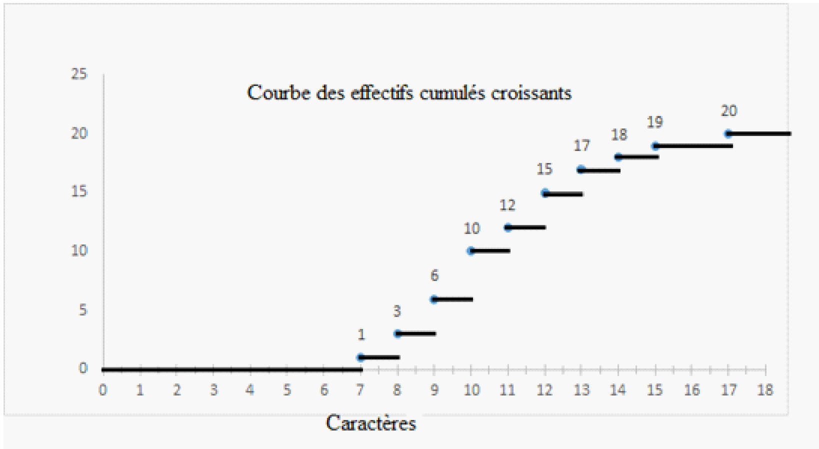
Exercice 4 1. *Tableau statistique*

Teneur	*Effectif*	$n_i^c \uparrow$	$n_i x_i$
7	1	1	7
8	2	3	16
9	3	6	27
10	4	10	40
11	2	12	22
12	3	15	36
13	2	17	26
14	1	18	14
15	1	19	15
17	1	20	17
Total	20		220

2. *Représentation graphique des effectifs*



Représentation graphique des effectifs cumulés croissants



1. *Le mode est* $Mo = 10$.

   La moyenne est $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} n_i x_i = \frac{220}{20} = 11$.

   Les quartiles : On a $n = 20 = 2 \times p$ *alors la médiane* $Me = Q_2 = \frac{x_p + x_{p+1}}{2} = \frac{10+11}{2} = 10.5$.

   Le premier quartile $Q_1 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{9+9}{2} = 9$.

   Le troisième quartile $Q_3 = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{12+13}{2} = 12.5$.

2. *En rajoutant la valeur* 12 *on obtient le tableau statistique suivant*

Teneur	*Effectif*	$n_i^c \uparrow$	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
7	1	1	7	49
8	2	3	16	128
9	3	6	27	243
10	4	10	40	400
11	2	12	22	242
12	4	16	48	576
13	2	18	26	338
14	1	19	14	196
15	1	20	15	225
17	1	21	17	289
Total	21		232	2686

   La série devient bimodale et les modes sont $Mo_1 = 10$ *et* $Mo_2 = 12$.

   La moyenne est $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} n_i x_i = \frac{232}{21} = 11.05$.

   Les quartiles : On a $n = 21 = 2 \times p$ *alors la médiane* $Me = Q_2 = x_{11} = 11$.

   Le premier quartile $Q_1 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{9+9}{2} = 9$.

   Le troisième quartile $Q_3 = \frac{x_{16} + x_{17}}{2} = \frac{12+13}{2} = 12.5$.

3. *L'écart-type* $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} n_i x_i^2 - \overline{X}^2} = \sqrt{\frac{2686}{21} - 122.1025} = \sqrt{5.8} \simeq 2.41$.

   Le coefficient de variation $CV_X = \frac{\sigma_X}{\overline{X}}100 = \frac{2.41}{11.05}100 = 21.81\%$.

   L'écart interquartile $IQR = Q_3 - Q_1 = 12.5 - 9 = 3.5$.

4. *Interprétation des résultats.*

   50%*des observations sont inférieures à* Me *et* 50% *sont supérieures* Me *;*

   25% *des observations sont inférieures à* Q_1 *et* 75%*sont supérieures à* Q_1 *;*

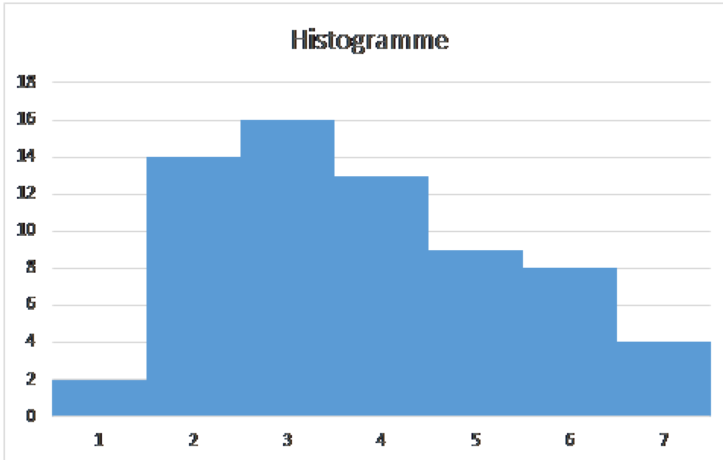
   75% *des observations sont inférieures à* Q_3 *et* 25% *sont supérieures à* Q_3 *;*

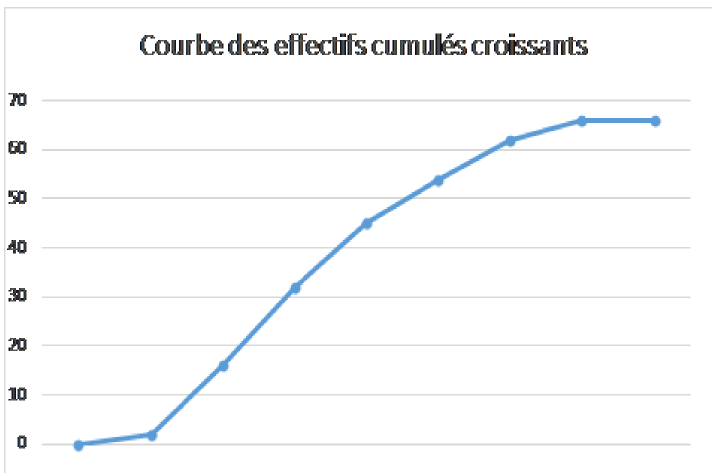
   $CV_X = 21.81\%$ *alors, la série statistique est homogène, les données sont faiblement dispersées.*

Exercice 5 1. *L'étendue de la série est* $3.2 - 0.8 = 2.4$ *et* $n = 66 > 50$ *alors le nombre de classes sera approximativment de* $n_c = 1 + \frac{10}{3}\log 66 \simeq 7$. *L'amplitude de chaque classe est donné par* $a = \frac{2.4}{7} \simeq 0.34$ *on prendra* $a = 0.4$ *et la première classe commencera par exemple par* 0.6.

Taux de cholestérol	*Centre*	*Effectif*	*Effectif cumulé croissant*
$[0.6; 1.0[$	0.8	2	2
$[1.0; 1.4[$	1.2	14	16
$[1.4; 1.8[$	1.6	16	32
$[1.8; 2.2[$	2.0	13	45
$[2.2; 2.6[$	2.4	9	54
$[2.6; 3.0[$	2.8	8	62
$[3.0; 3.4[$	3.2	4	66
Total		66	−

2. *L'histogramme et la courbe des effectifs cumilés croisssants*





1. *La classe modale est* $[1.4; 1.8[$ *et le mode est* $Mo = 1.6$.

   La moyenne est

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i x_i \\
&= \frac{1}{66}\left(2\times 0.8 + 14\times 1.2 + 16\times 1.6 + 13\times 2.0 + 9\times 2.4 + 8\times 2.8 + 4\times 3.2\right) \\
&\simeq 1.92.
\end{aligned}$$

   On a $\frac{n}{4} = 16.5$ *alors le premier quartile* $Q_1 \in [1.4; 1.8[$ *et il est donné par*

$$\begin{aligned}
\frac{Q_1 - 1.4}{1.8 - 1.4} &= \frac{16.5 - 16}{32 - 16} \\
&\Longrightarrow Q_1 = \frac{0.5}{16} 0.4 + 1.4 \\
&\Longrightarrow Q_1 = 1.41.
\end{aligned}$$

On a $\frac{n}{2} = 33$ *alors la médiane* $Me \in [1.8; 2.2[$ *et elle est donnée par*

$$\begin{aligned} \frac{Me - 1.8}{2.2 - 1.8} &= \frac{33 - 32}{45 - 32} \\ &\Longrightarrow Me = \frac{1}{13} 0.4 + 1.8 \\ &\Longrightarrow Me \simeq 1.83. \end{aligned}$$

On a $\frac{3n}{4} = 49.5$ *alors le troisième quartile* $Q_3 \in [2.2; 2.6[$ *et il est donné par*

$$\begin{aligned} \frac{Q_3 - 2.2}{2.6 - 2.2} &= \frac{49.5 - 45}{54 - 45} \\ &\Longrightarrow Q_3 = \frac{4.5}{9} 0.4 + 2.2 \\ &\Longrightarrow Q_3 \simeq 2.4. \end{aligned}$$

2. *L'écart-type est* σ_X. *on a*

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \frac{1}{66} \sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2 - \overline{X}^2 \\ &= \frac{1}{66} \big(2 \times 0.8^2 + 14 \times 1.2^2 + 16 \times 1.6^2 + 13 \times 2.0^2 \\ &\quad + 9 \times 2.4^2 + 8 \times 2.8^2 + 4 \times 3.2^2\big) - 1.92^2 \\ &= 4.0897 - 3.6864 = 0.4033 \end{aligned}$$

alors $\sigma_X = \sqrt{0.4033} \simeq 0.6351.$

Le coefficient de variation est

$$\begin{aligned} CV_X &= \frac{\sigma_X}{\overline{X}} 100 = \frac{0.6351}{1.92} 100 \\ CV_X &\simeq 33.08\% \end{aligned}$$

$CV_X = 33.08\%$ *alors, la série statistique est hétérogène, les données sont assez dispersées.*

Exercice 6 1. *L'étendue de la série est* $\alpha - 800 = 3200 \Longrightarrow \alpha = 4000.$

2. *Le tableau statistique*

Budget X	*Centre*	*Fréquence cumulée*	*Fréquences*
$[800; 1000[$	900	0.08	0.08
$[1000; 1400[$	1200	0.18	0.10
$[1400; 1600[$	1500	0.34	0.16
$[1600; \beta[$	$\frac{\beta+1600}{2}$	0.64	0.30
$[\beta; 2400[$	$\frac{2400+\beta}{2}$	0.73	0.09
$[2400; 4000[$	3200	1	0.27
Total		$-$	1

3. a) *On a*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \sum_{i=1}^{6} f_i x_i \\
&= 900 \times 0.08 + 1200 \times 0.10 + 1500 \times 0.16 \\
&\quad + \frac{\beta + 1600}{2} \times 0.30 + \frac{2400 + \beta}{2} \times 0.09 + 3200 \times 0.27 = 1644 + 0.195\beta = 1995 \\
&\Longrightarrow \beta = \frac{1995 - 1644}{0.195} \\
&\Longrightarrow \beta = 1800
\end{aligned}$$

b) *La médiane* $Me = 1920 \in [1600; \beta[$ *on utilise l'interpolation linéaire pour la déterminer.*

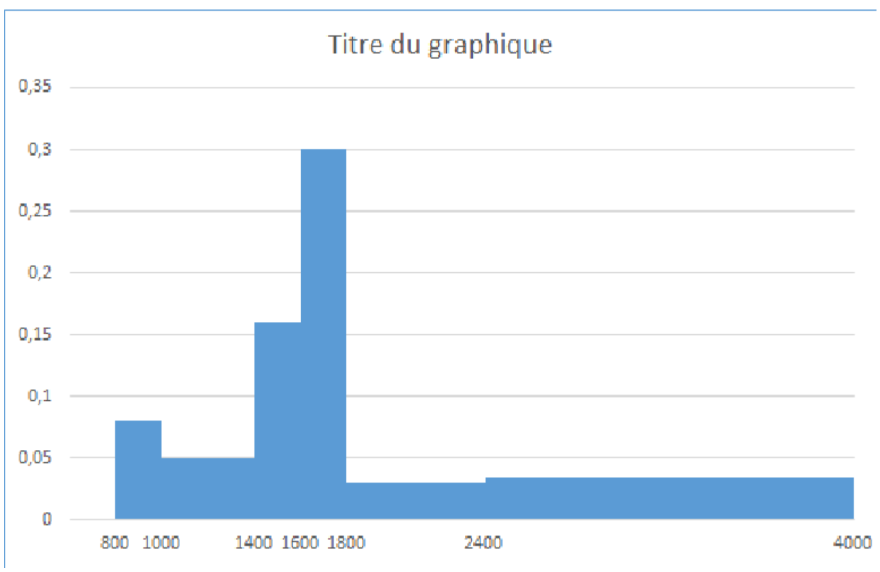
1. *On prend* $\beta = 1800$.

Budget X	*Centre*	*Fréquence cumulée*	*Fréquences*
$[800; 1000[$	900	0.08	0.08
$[1000; 1400[$	1200	0.18	0.10
$[1400; 1600[$	1500	0.34	0.16
$[1600; 1800[$	1700	0.64	0.30
$[1800; 2400[$	2100	0.73	0.09
$[2400; 4000[$	3200	1	0.27
Total		$-$	1

Comme les amplitudes sont inégales la construction de l'histogramme nécessitera la correction des fréquences. Les plus petites amplitudes étant égales à 200 alors nous aurons le tableau suivant avec les coefficients de correction ainsi que les fréquences corrigées pour *chacune des classes*

Budget X	*Amplitude*	*Coefficient de*	*Fréquences*	*Fréquences*
		correction $k_i = \frac{a_i}{200}$		*corrigées* $= \frac{f_i}{k_i}$
$[800; 1000[$	200	*1*	0.08	0.080
$[1000; 1400[$	400	*2*	0.10	0.050
$[1400; 1600[$	200	*1*	0.16	0.160
$[1600; 1800[$	200	*1*	0.30	0.300
$[1800; 2400[$	600	*3*	0.09	0.030
$[2400; 4000[$	1600	*8*	0.27	0.034
Total		$-$	1	

où a_i, k_i *et* f_i *sont respectivement l'amplitude, le coefficient de correction et la fréquence de la classe* i. *On a alors l'histogramme suivant :*



2. *La médiane est donnée par*

$$\frac{Me - 1600}{1800 - 1600} = \frac{0.50 - 0.34}{0.64 - 0.34}$$
$$\Longrightarrow Me = \frac{0.16}{0.30}200 + 1600$$
$$\Longrightarrow Me \simeq 1706.67.$$

Le premier quartile $Q_1 \in [1400; 1600[$ *et il est donné par*

$$\begin{aligned} \frac{Q_1 - 1400}{1600 - 1400} &= \frac{0.25 - 0.18}{0.34 - 0.18} \\ &\Longrightarrow Q_1 = \frac{0.07}{0.16} 200 + 1400 \\ &\Longrightarrow Q_1 = 1487.5 \end{aligned}$$

Le troisième quartile $Q_3 \in [2400; 4000[$ *et il est donné par*

$$\begin{aligned} \frac{Q_3 - 2400}{4000 - 2400} &= \frac{0.75 - 0.73}{1 - 0.73} \\ &\Longrightarrow Q_3 = \frac{0.02}{0.27} 1600 + 2400 \\ &\Longrightarrow Q_3 \simeq 2518.52 \end{aligned}$$

3. *L'écart-type est* σ_X. *on a*

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \sum_{i=1}^{6} f_i x_i^2 - \overline{X}^2 \\ &= 900^2 \times 0.08 + 1200^2 \times 0.10 + 1500^2 \times 0.16 \\ &\quad +1700^2 \times 0.30 + 2100^2 \times 0.09 + 3200^2 \times 0.27 - 1995^2 \\ &= 4597500 - 1995^2 = 617475 \end{aligned}$$

alors $\sigma_X = \sqrt{617475} \simeq 785.80.$

Le coefficient de variation est

$$\begin{aligned} CV_X &= \frac{\sigma_X}{\overline{X}} 100 = \frac{785.80}{1995} 100 \\ CV_X &\simeq 39.39\% \end{aligned}$$

L'étendue interquartile est

$$\begin{aligned} IQR &= Q_3 - Q_1 = 2518.52 - 1487.5 \\ IQR &= 1031.02. \end{aligned}$$