Université Badji Mokhtar- Faculté des Sciences
Tronc commun de Mathématiques et Informatique
2019-2020

Corrigé de la série d'exercices n°2-C

Équations différentielles du premier et second ordre

Par

A. A. RABIA

I- Équations différentielles du premier ordre.

Exercice 1.

$$(2x+y)dx-(4x-y)dy=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$\Leftrightarrow (2x+y)dx=(4x-y)dy$

$\Leftrightarrow \frac{2x+y}{4x-y}=\frac{dy}{dx}$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{4x-y}$

Donc l'équation (1) peut être écrite sous la forme :

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{4x-y} \ldots\ldots..\ldots\ldots..(2)$

C'est une équation homogène du premier ordre.

car elle est de la forme $y^{'}=f(x,y)$ où $f(x,y)=\frac{2x+y}{4x-y}$

Et on vérifie aisément que $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$ c. à. d:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{2\lambda x+\lambda y}{4\lambda x-\lambda y}=\frac{\lambda(2x+y)}{\lambda(4x-y)}=\frac{2x+y}{4x-y}=f(x,y)$$

Posons : $y=ux$ $\left(\text{ou bien } u=\frac{y}{x}\right)$ ce qui donne $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

Remplaçons dans l'équation (2) pour obtenir :

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2x + ux}{4x - ux}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{x(2 + u)}{x(4 - u)}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2 + u}{4 - u}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2 + u}{4 - u} - u$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2 + u - u(4 - u)}{4 - u}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2 + u - 4u + u^2}{4 - u}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2 - 3u + u^2}{4 - u}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 3u + 2}{4 - u}$$

Séparons les variables :

$$\frac{4 - u}{u^2 - 3u + 2}du = \frac{dx}{x} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Simplifions l'écriture de $\frac{4-u}{u^2-3u+2}$ pour le calcul direct de l'intégrale

On a $u^2 - 3u + 2 = (u-1)(u-2)$

$$\frac{4-u}{u^2-3u+2} = \frac{4-u}{(u-1)(u-2)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u-2} = \frac{A(u-2)+B(u-1)}{(u-1)(u-2)}$$
$$= \frac{u(A+B)-2A-B}{(u-1)(u-2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ -2A-B=4 \end{cases} \qquad \Rightarrow A=-3 \text{ et } B=2$$

Donc $\dfrac{4-u}{u^2-3u+2} = \dfrac{-3}{u-1} + \dfrac{2}{u-2}$

D'où (3) devient : $\left(\dfrac{-3}{u-1} + \dfrac{2}{u-2}\right)du = \dfrac{dx}{x}$

En passant à l'intégrale on obtient :

$$\int \left(\frac{-3}{u-1} + \frac{2}{u-2}\right)du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{-3}{u-1}du + \int \frac{2}{u-2}du = \int \frac{dx}{x}$$

$$-3\int \frac{du}{u-1} + 2\int \frac{du}{u-2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-3\ ln|u-1| + 2\ ln|u-2| = ln|x| + ln|c|$$

$$-ln|u-1|^3 + ln|u-2|^2 = ln|x| + ln|c|$$

Ce qui donne : $ln\dfrac{|u-2|^2}{|u-1|^3} = ln|cx|$

Et les solutions générales sont donc :

$$\frac{(u-2)^2}{(u-1)^3} = cx, \qquad c \in IR$$

Ou encore, comme $u = \dfrac{y}{x}$ on peut écrire :

$$\frac{(\frac{y}{x}-2)^2}{(\frac{y}{x}-1)^3} = cx \Leftrightarrow (\frac{y}{x}-2)^2 = cx(\frac{y}{x}-1)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{y-2x}{x}\right)^2 = cx\left(\frac{y-x}{x}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-2x)^2}{x^2} = cx\frac{(y-x)^3}{x^3} \Leftrightarrow \frac{(y-2x)^2}{x^2} = c\frac{(y-x)^3}{x^2}$$

D’où

$$\boxed{(y-2x)^2 = c(y-x)^3}$$

II- Équations différentielles du second ordre.

Exercice 2.

$$y'' + 2y' = (4 + 3x)e^x \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (E)$$

C'est une équation du second ordre avec second membre.
Donc la solution générale est donnée par :

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

Sachant que $y_0(x)$ est la solution de l'équation :

$$y'' + 2y' = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (E_0)$$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 + 2r = 0$

$$\Delta = 2^2 - 4 * 1 * 0 = 4 > 0 \Rightarrow r_1 = \frac{-2 + \sqrt{4}}{2} = 0 \; et \; r_2 = \frac{-2 - \sqrt{4}}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Donc elle admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 0$ et $r_2 = -2$.

Par conséquent, les solutions de l'équation (E_0) sont :

$$y_0(x) = \lambda_1 e^{0.x} + \lambda_2 e^{-2x} = \lambda_1 + \lambda_2 e^{-2x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in IR$$

Cherchons maintenant la solution particulière.

Comme le second membre de l'équation (E) est $g(x) = (4 + 3x)e^{x}$

est sous la forme $p(x)e^{ax}$(où $p(x) = 4 + 3x$: *un polynôme de degré* 1)

donc la solution particulière est sous la forme $y_p(x) = e^{ax} x^m q(x)$

q est un polynôme de degré 1 (même degré que p).

Comme a=1 n'est pas une racine du polynôme caractéristique, alors m=0.
Et la solution particulière sera donc sous la forme :

$$y_p(\mathrm{x}) = e^{x}(\mathrm{ax} + \mathrm{b})$$

les constantes a et b sont des constantes à déterminer pour que y_p soit une solution de l'équation (E).

On a

$$y_p(x) = e^{ax}(ax + b)$$

$$y'_p(x) = e^{x}(ax + b) + ae^{x} = e^{x}(ax + b + a)$$

$$y''_p(x) = e^{x}(ax + b + a) + ae^{x} = e^{x}(ax + b + 2a)$$

On remplace dans l'équation (E) pour avoir :

$$e^x(ax + b + 2a) + 2e^x(ax + b + a) = (4 + 3x)e^x$$

$$e^x(ax + b + 2a + 2ax + 2b + 2a) = (4 + 3x)e^x$$

$$e^x(3ax + 3b + 4a) = (4 + 3x)e^x$$

Par identification :

$$3a = 3 \; et \; 3b + 4a = 4$$

ainsi

$$a = 1 \; et \; b = 0$$

Par conséquent

$$y_p(x) = xe^x.$$

Et la solution générale de l'équation (E) est donnée par :

$$\boxed{y(x) = \lambda_1 + \lambda_2 e^{-2x} + \; xe^x; \; \lambda_1, \lambda_2 \in IR}$$