2.6 Simplification d'une fonction logique

2.6.1 la méthode algébrique

En se basant sur les propriétés de l'algèbre de Boole, la méthode algébrique permet de réduire les operateurs dans une fonction logique et en conséquence son le circuit logique.

Exemple 01 : cas d'une fonction a deux variables

$$f(a,b) = a.b + \bar{a}.b$$

$$(a,b) = (a+\bar{a}).b \quad \text{Propriété de distributivité}$$

$$f(a,b) = (\overbrace{\cancel{a+\bar{a}}}^{=1}).b \quad \text{Propriété de complémentarité}$$

$$f(a,b) = b$$

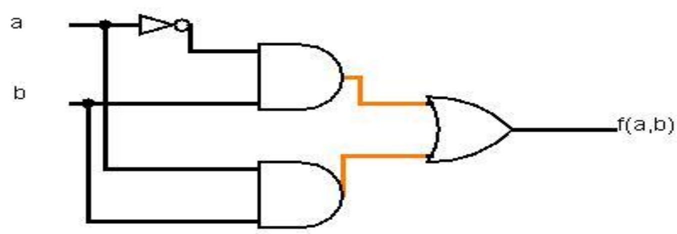


Fig 2.6.1 : Logigramme de *f(a,b)* avant simplification

Fig 2.6.2 : Logigramme de *f(a,b)* après simplification

On voit bien qu'il faut d'abord simplifier une fonction avant de réaliser sin circuit.

2.6.2 La methode du tableau de Karnaugh

C'est une méthode de simplification plus puissante que l'approche algébrique. Pour mieux saisir la méthode on doit comprendre la notion de **1 adjacents** au sens de Karnaugh.

Si on reprend la fonction ci-dessus et l'on trace sa TdV

a	b	f(a,b)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Bien que les deux **1** de la fonction décrite sur sa TdV ne sont pas l'un à côté de l'autre, mais ils se partagent <u>une et une seule variable</u> qui change d'état, la variable **a** et d'après la propriété de l'algèbre de Boole :

$$f(a,b) = (a + \bar{a}).b \text{ propriété de complémentarité}$$

a disparait et ne reste que la variable b sous sa forme directe et donc

$$f(a,b) = b$$

Sur le tableau de Karnaugh de la fonction f en question :

A\B	0	1
0	0	1
1	0	1

Les **1** entourés d'un cercle signifient que la variable sur les lignes a change d'état et a été éliminé (loi de complémentarité) et reste la variable b sur sa forme directe deuxième colonne.
C'est une table de vérité a deux dimensions, la différence avec la première se verra a partir d'une fonction a trois variables.

<u>Exemples de fonctions :</u>

A\B	0	1
0	0	0
1	1	1

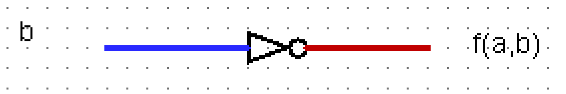
cette fois-ci c'est le b qui change d'état et donc éliminé de l'expression de la fonction f, les deux **1** sont adjacents et changent de colonnes.

$$F(a,b) = a$$

A\B	0	1
0	1	0
1	1	0

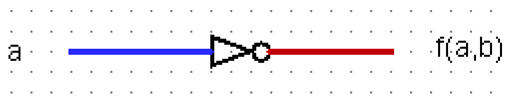
cette fois-ci c'est le a qui change d'état et donc éliminé de l'expression de la fonction f, les deux **1** sont adjacents et changent de ligne. La variable b reste sur la colonne 0.

$$f(a,b) = \bar{b}$$



$$f(a,b) = \bar{b}$$

A\B	0	1
0	1	1
1	0	0



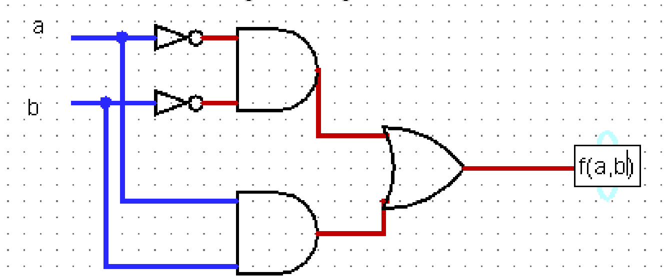
La variable a reste sur la ligne 0 et c'est b qui change d'état et est éliminé.

$$f(a,b) = \bar{a}$$

A\B	0	1
0	1	0
1	0	1

Cette fois-ci les deux 1 ne sont pas adjacents au sens de Karnaugh, le 1 en vert : $\bar{a}.\bar{b}$ et le 1 en bleu : $a.b$, changent tous les deux d'état en même temps.

La fonction $f(a,b) = \bar{a}\bar{b} + ab$, n'est pas simplifiable, c'est une forme de base.



*Règle N 01 : on peut regrouper **deux** adjacents dans une somme de produits en éliminant **la** variable qui change d'état.*

<u>Exemple 02</u> : cas d'une fonction à trois variables

A\BC	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	0	0

On voit bien ici que la fonction $f(a,b,c) = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b.\bar{c} = \bar{a}.\cancelto{1}{(\bar{b}+b)}.\bar{c}$. La variable b change d'état et est éliminé. $f(a,b,c) = \bar{a}.\bar{c}$.

A\BC	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1

$f(a,b,c) = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b.\bar{c} + a.\bar{b}.\bar{c} + a.b.\bar{c} = \bar{a}.\cancelto{1}{(\bar{b}+b)}.\bar{c} + a.\cancelto{1}{(\bar{b}+b)}.\bar{c} = \bar{a}.\bar{c} + a.\bar{c} = \cancelto{1}{(\bar{a}+a)}.\bar{c} = \bar{c}$

On voit bien que les deux **1** sur la première ligne sont adjacents b est éliminé, également les deux **1** de la deuxième ligne sont aussi adjacents b est éliminé. La même variable est éliminée car ils sont sur les mêmes colonnes.
Les deux de la première colonne est les deux de la dernière colonne sont aussi adjacents et c'est a qui est éliminée.

A\BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0

$f(a,b,c) = c$

A\BC	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0

$f(a,b,c) = \bar{a}$

A\BC	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1

$f(a,b,c) = b$

A\BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1

$f(a,b,c) = a$

A\BC	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	1	0	0

$f(a,b,c) = \overline{b}$

Règle N 02 : on peut regrouper ***quatre*** **1** *adjacents dans une somme de produits en éliminant* ***les deux*** *variables qui changent d'état.*

Exemple 03 : cas d'une fonction à quatre variables

AB\CD	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	0	0	0
10	1	0	0	0

Les variables a et b ont changes d'état et sont éliminés et
$f(a,b,c,d) = \overline{c}.\overline{d}$.

AB\CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	0	1	0	0

Les variables a et b ont changes d'état et sont éliminés et
$f(a,b,c,d) = \overline{c}.d$

On sait faire pour quatre **1** adjacents même pour une fonction à quatre variables, mais si on a le TK suivant :

AB\CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

$f(a,b,c,d) = \bar{c}.\bar{d}.+\bar{c}.d$, si on continue algébriquement $f(a,b,c,d) = \bar{c}.(\overset{1}{\cancel{\bar{d}+d}}) = \bar{c}.$
Trois variables sont donc élimines pour ces huit **1** adjacents.

AB\CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

$f(a,b,c,d) = d$

AB\CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$f(a,b,c,d) = \bar{d}$

AB\CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

$f(a,b,c,d) = b$

AB\CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}.b + a.\bar{b}$$

C'est une fonction qui a huit **1** qui ne sont pas adjacents. Elle possède deux groupes de quatre **1** adjacents. Le passage entre la deuxième et quatrième ligne deux variables changent d'état en même temps et donc il n'y a pas possibilité de simplification.

*Règle N 03 : on peut regrouper **huit** **1** adjacents dans une somme de produits en éliminant les **trois** variables qui changent d'état.*

Remarque : dans un groupe de 2^n **1** *adjacents,* n est le nombre de variables éliminées.

Exemple 03 : cas de **1** *adjacents dans plusieurs groupes*

A\B	0	1
0	0	1
1	1	1

$$f(a,b) = a + b$$

A\B	0	1
0	1	1
1	0	1

$$f(a,b) = \bar{a} + b$$

A\BC	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0

$$f(a,b) = \bar{a} + b.c$$

*Règle N 04 : un même **1** pour participer dans plusieurs groupes de **1** adjacents.*