2.5 Representation d'une fonction logique

2.5.1 Forme algébrique

Une fonction logique est une expression mathématique de variables booléennes reliées par des operateurs : NON, ET, OU.

Soit f une fonction telle que :

$$f(a,b) = a.b + \bar{a}.\bar{b}$$

avec, a et b les variables logiques et les termes de cette fonction.

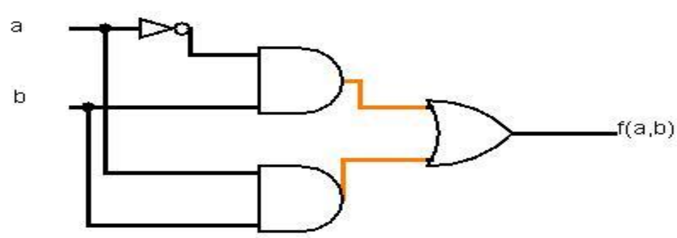
2.5.1 Forme table de vérité (TdV)

Soit la fonction f définie par $f(a,b) = 1\ si\ a = 0\ et\ b = 1$ ou $a = 1\ et\ b = 1$ sinon $f(a,b) = 0$ ailleurs.

Sa table de verite est :

a	b	f(a,b)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

2.5.1 Forme diagramme logique ou logigramme



Remarque : toutes les formes de représentation d'une fonction logique sont équivalentes et le passage d'une forme à une autre peut se faire aisément.

2.5.1 Formes canoniques

Un terme algébrique est dit canonique s'il contient une occurrence de chacune des variables impliquées dans la fonction.

Première forme : (somme de produits)

Sa forme généralisée a n est :

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots . x_n) = \sum_{i=1}^{2^n} (\begin{Bmatrix} x_1 \\ \bar{x}_1 \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} x_2 \\ \bar{x}_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3 \\ \bar{x}_3 \end{Bmatrix} \dots . \begin{Bmatrix} x_n \\ \bar{x}_n \end{Bmatrix}) . K_i$$

ou $\begin{Bmatrix} x_i \\ \bar{x}_i \end{Bmatrix}$ est la variable sous sa forme directe ou inverse.

n : le nombre de variables impliquées dans la fonction

K_i : l'état de la fonction.

Exemple 01: Soit la table de verite d'une fonction donnée :

x	y	f(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$f(x, y) = \bar{x}.\bar{y}.K_1 + \bar{x}.y.K_2 + x.\bar{y}.K_3 + x.y.K_4$$

$$f(x, y) = \bar{x}.\bar{y}.1 + \bar{x}.y.0 + x.\bar{y}.0 + x.y.1$$

$$f(x, y) = \bar{x}.\bar{y} + x.y$$

Deuxième forme : (produit de sommes)

Sa forme généralisée a n est :

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots . x_n) = \prod_{i=1}^{2^n} \left(\begin{Bmatrix} x_1 \\ \bar{x}_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_2 \\ \bar{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_3 \\ \bar{x}_3 \end{Bmatrix} + \dots + K_i \right)$$

Pour l'exemple de la fonction donnée ci-dessus

$$f(x, y) = (x + y + K_1).(x + \bar{y} + K_2).(\bar{x} + y + K_3).(\bar{x} + \bar{y} + K_4)$$

$$=(x + y + 1).(x + \bar{y} + 0).(\bar{x} + y + 0).(\bar{x} + \bar{y} + 1)$$

$$=(x + \bar{y}).(\bar{x} + y)$$

Passage de la première forme a la deuxième forme :

Reprenons la TdV de la fonction citée en exemple et retrouvons son inverse :

x	y	f(x,y)	$\bar{f}$(x,y)
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Ecrivons la première forme de $\bar{f}$(x,y) :

$$\bar{f}(x, y) = \bar{x}. y + x. \bar{y}$$

Calculons l'inverse de $\bar{f}$(x,y) comme suis en lui appliquant les deux théorèmes de De Morgan :

$$\overline{\bar{f}(x, y)} = \overline{\bar{x}. y + x. \bar{y}}$$

$$f(x, y) = \overline{\bar{f}(x, y)} = (\overline{\bar{x}. y}). (\overline{x. \bar{y}})$$

$$f(x, y) = \overline{\bar{f}(x, y)} = (\bar{\bar{x}} + \bar{y}). (\bar{x} + \bar{\bar{y}})$$

$$f(x, y) = \overline{\bar{f}(x, y)} = (x + \bar{y}). (\bar{x} + y)$$

Troisième forme : forme NON-ET (NAND)

Elle est déduite de la première forme, elle permet de représenter une fonction logique a l'aide d'un seul operateur NAND.

Exemple 02 :

$f_1(x, y, z) = \bar{x}. \bar{y}. z+. x. \bar{y}. \bar{z} + x. y. z$ 1ère forme de f_1

$f_1(x, y, z) = \overline{\overline{\bar{x}. \bar{y}. z}. \overline{x. \bar{y}. \bar{z}}. \overline{x. y. z}}$ 3ieme forme de f_1

Quatrième forme : forme NON-OU (NOR)

Elle est déduite de la deuxieme forme, elle permet de représenter une fonction logique a l'aide d'un seul operateur NOR.

Exemple 03 :

$f_2(x, y) = (x + y). (\bar{x} + y)$ 2ieme forme de f_2

$f_2(x, y) = \overline{\overline{(x + y)} + \overline{(\bar{x} + y)}}$ 4ieme forme de f_2