Algèbre 2 Série 2 (Applications Linéaires)

Exercice 2

Dr Elbahi Hadidi

11/04/2020

Image de la base canonique

1) On a f est une application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\longrightarrow f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z). \end{aligned}$$

Calculons les images par f des vecteurs de B
avec $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$

tel que :

$$\left| \begin{array}{l} e_1 = (1, 0, 0) \\ e_2 = (0, 1, 0) \\ e_3 = (0, 0, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, -1, 0, 1) = w_1 \\ f(e_2) = f(0, 1, 0) = (0, 1, 1, 1) = w_2 \\ f(e_3) = f(0, 0, 1) = (1, 0, 1, 2) = w_3 \end{array} \right.$$

Base de Im f

2) Base de $\operatorname{Im} f$:
On a : $\operatorname{Im} f = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 / \exists u \in \mathbb{R}^3 : v = f(u) \right\}$.
On simplifie $\operatorname{Im} f = \left\{ f(u) / u \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

On sait que l'image d'une base de $\mathbb{R}^3$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
Donc $\{w_1, w_2, w_3\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Or remarquons que : $w_3 = w_1 + w_2$, alors

$\{w_1, w_2, w_3\}$ est une famille liée, alors ce n'est pas une base.
$\{w_1, w_2\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Base de Im f

Ainsi $\{w_1, w_2\}$ est libre : $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = (0,0,0,0)$

$$\Longrightarrow \alpha_1 (1,-1,0,1) + \alpha_2 (0,1,1,1) = (0,0,0,0)$$
$$\Longrightarrow (\alpha_1, -\alpha_1, 0, \alpha_1) + (0, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = (0,0,0,0)$$
$$\Longrightarrow (\alpha_1, -\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = (0,0,0,0)$$
$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{c} \alpha_1 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0.$$

D'où $B' = \{w_1, w_2\}$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$.

On peut déduire que dim $\mathrm{Im}\, f$ =card $B' = 2$.

Base de Ker f

3) Déterminer une base de $\ker f$.

On a : $\ker f = \left\{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = (0,0,0,0)\right\}$.

$\ker f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ (x+z, y-x, z+y, x+y+2z) = (0,0,0,0)\right\}$.

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{r} x+z=0 \\ y-x=0 \\ z+y=0 \\ x+y+2z=0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow z=-x, y=x.$$

$\Longrightarrow \ker f = \{(x,x,-x) / x \in \mathbb{R}\}$.

$\Longrightarrow \ker f = \{x(1,1,-1) / x \in \mathbb{R}\}$.

Donc $\ker f$ est engendré par un seul vecteur non nul u_1:

$u_1 = (1,1,-1) \neq (0,0,0)$, u_1 est libre, alors

$B'' = \{u_1\}$ est une base de $\ker f$.

On peut déduire que $\dim \ker f = \text{card } B'' = 1 \neq 0$.

Injectivité et Surjectivité de f ?

4)
L'application f n'est pas injective car

$\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$,puisque $\dim \ker f =$ card $B'' = 1 \neq 0$.

L'application f n'est pas surjective car

$\mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{R}^4$, puisque $\dim \mathrm{Im}\, f = 2 \neq 4 = \dim \mathbb{R}^4$.