Algèbre 2 Série 2 (Applications Linéaires)

Exercice 1

Dr Ahmed Berkane

11/04/2020

Définition d'une application linéaire

Définition. E, F sont deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$.

$$\begin{array}{l} f : E \longrightarrow F \\ u \longrightarrow v = f(u) \end{array}$$ est une application linéaire si :

1) $\forall u_1 \in E, \forall u_2 \in E : f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$.

2)$\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$.

ou bien vous avez un résultat équivlent :

Proposition. f est une application linéaire si et seulement si :

$\forall u_1 \in E, \forall u_2 \in E, \forall \lambda_1 \in \mathbb{K}, \forall \lambda_2 \in \mathbb{K}$:

$$f(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2) = \lambda_1 \cdot f(u_1) + \lambda_2 \cdot f(u_2).$$

Oui la première application est linéaire

a) $\begin{array}{l} f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longrightarrow f_1(x, y) = (2x + y, x - y) \end{array}$

est une application linéaire, en effet :

1) $\forall u_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2, \forall u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$:
$f_1(u_1 + u_2) = f_1(u_1) + f_1(u_2)$.
On a: $u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$ (car $+$ est interne dans $\mathbb{R}$).
$\Longrightarrow f_1(u_1 + u_2) = f_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$\Longrightarrow f_1(u_1 + u_2) = (2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2))$
$\Longrightarrow f_1(u_1 + u_2) = (2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$
$\Longrightarrow f_1(u_1 + u_2) = ((2x_1 + y_1) + (2x_2 + y_2), (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2))$
$\Longrightarrow f_1(u_1 + u_2) = (2x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (2x_2 + y_2, x_2 - y_2)$

$\Longrightarrow f_1(u_1 + u_2) = f_1(u_1) + f_1(u_2)$.

Oui la première application est linéaire

2) $\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R} : f_1 \cdot (\lambda u) = \lambda \cdot f_1 (u)$.

On a: $\lambda \cdot u = (\lambda.x, \lambda.y) \in \mathbb{R}^2$.

$\Longrightarrow f_1 \cdot (\lambda u) = f_1 (\lambda x, \lambda y)$

$\Longrightarrow f_1 (\lambda \cdot u) = (2 (\lambda x) + (\lambda y) , (\lambda x) - (\lambda y))$

$\Longrightarrow f_1 (\lambda \cdot u) = \lambda \cdot (2x + y, x - y)$

$\Longrightarrow f_1 (\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f_1 (u)$.

Non la deuxième application n'est pas linéaire

b) $\begin{array}{l} f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longrightarrow f_2(x, y, z) = (xy, x, y) \end{array}$

n'est pas une application linéaire, car :

1) $\exists u_1 = (1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3, \exists u_2 = (1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$:
$f_2(u_1 + u_2) \neq f_2(u_1) + f_2(u_2)$.

On a: $u_1 + u_2 = (2, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$
$\Longrightarrow f_2(u_1 + u_2) = f_2(2, 2, 0) = (4, 2, 2)$.
et on a
$\left| \begin{array}{l} f_2(u_1) = f_2(1, 1, 0) = (1, 1, 1). \\ f_2(u_2) = f_2(1, 1, 0) = (1, 1, 1). \end{array} \right. \Longrightarrow f_2(u_1) + f_2(u_2) = (2, 2, 2).$

alors $f_2(u_1 + u_2) = (4, 2, 2) \neq (2, 2, 2) = f_2(u_1) + f_2(u_2)$.

Donc $f_2(u_1 + u_2) \neq f_2(u_1) + f_2(u_2)$.

c) $\begin{array}{l} f_3 : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \longrightarrow f_3(P) = (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$

est une application linéaire, en effet :

1) $\forall P_1 \in \mathbb{R}_3[X], \forall P_2 \in \mathbb{R}_3[X] : f_3(P_1 + P_2) = f_3(P_1) + f_3(P_2)$.

On a: $f_3(P_1 + P_2) = ((P_1 + P_2)(-1), (P_1 + P_2)(0), (P_1 + P_2)(1))$
$\Longrightarrow$
$f_3(P_1 + P_2) = (P_1(-1) + P_2(-1), P_1(0) + P_2(0), P_1(1) + P_2(1))$
$\Longrightarrow$
$f_3(P_1 + P_2) = (P_1(-1), P_1(0), P_1(1)) + (P_2(-1), P_2(0), P_2(1))$
$\Longrightarrow$
$f_3(P_1 + P_2) = f_3(P_1) + f_3(P_2)$.

Oui la troisième application est linéaire

2) $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \forall \lambda \in \mathbb{R} : f_3(\lambda \cdot P) = \lambda \cdot f_3(P)$.

On a : $f_3(\lambda \cdot P) = ((\lambda P)(-1), (\lambda P)(0), (\lambda P)(1))$

$$\Longrightarrow f_3(\lambda \cdot P) = ((\lambda P)(-1), (\lambda P)(0), (\lambda P)(1))$$

$$\Longrightarrow f_3(\lambda \cdot P) = (\lambda (P(-1), P(0), P(1)))$$

$$\Longrightarrow f_3(\lambda \cdot P) = \lambda \cdot (P(-1), P(0), P(1))$$

$$\Longrightarrow f_3(\lambda P) = \lambda \cdot f_3(P).$$