Fonctions Analytiques

Ce cours est déstiné aux étudiants de 2^e année licence mines ($Maths$ 4)

April 12, 2020

1 Séries entières

Dans cette partie, on rappelle rapidement les principales définitions et les principaux résultats concernent les séries entières.

Définition 1 *Une série de la forme*

$$\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 = ...$$

est appelée série entière en $z = z_0$.

1.1 Rayon de convergence

Il existe un nombre réel positif tel que
$\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ converge pour $|z-z_0| < R$ et diverge pour $|z-z_0| > R$, cependant que pour $|z-z_0| = R$ elle peut ou non converge (cas douteux).

Le nombre R est souvent appelé le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$.

L'ensemble $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z-z_0| < R\}$ est appelé disque de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$.

Le cercle $|z-z_0| = R$ est appelée cercle de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$.

Remarque 2 *Le rayon de convergence d'une série entière* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ *est caractérisé par*

1) $|z-z_0| < R \Longrightarrow \sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ *est absolument convergente.*

2) $|z-z_0| > R \Longrightarrow \sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ *est divergente.*

3) $|z-z_0| = R$ *est le cas douteux où on ne peut rien dire sur la nature de la série.*

4) $|z-z_0| \leq r < R$ *pour* $r > 0$*, la série est normalement convergente.*

Remarque 3 *Convergence normale* $\Longrightarrow$ *Convergence uniforme.*

Nous pouvons obtenir le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ par critère de *D'Alembert*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

ou celui de Cauchy

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Exemple

Soit la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$

on a $a_n = 1, \quad n \geq 0$

donc

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1$$

cette série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| \geq 1$.

Proposition 4 · *Une série entière peut être dérivée terme à terme dans tout ouvert connexe situé à l'intérieur du cercle de convergence.*

· *Une série entière peut être intégrée terme à terme sur toute courbe* Γ *située entièrement à l'intérieur du cercle de convergence.*

1.2 Séries de Taylor

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple Γ et sur Γ, alors

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!}f''(z_0) + ... + \frac{(z - z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0) + ...$$

cette série est appelée série de Taylor ou développement de Taylor de f.

Le domaine de convergence de cette série est définie par $|z - z_0| < R$ où R est le rayon de convergence,

sur $|z - z_0| = R$ la série peut ou non converge,

pour $|z - z_0| > R$ la série diverge.

Remarque 5 *Si $z_0 = 0$, la série obtenue est appelée série de Maclaurin.*

1.3 Quelques séries particulières

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ..., \qquad |z| < \infty$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ..., \qquad |z| < \infty$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., \qquad |z| < \infty$$

$$\ln z = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - ... + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + ..., \qquad |z| < 1$$

$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + ..., \qquad |z| < 1$$

$$(1 + z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + ... + \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}z^n + ... \qquad |z| < 1.$$

2 Fonctions Analytiques

Soit f une fonction complexe définie dans un ouvert E du plan complexe.

Définition 6 *Une fonction f est analytique dans son domaine de définition $\mathcal{D}$, si pour $z \in \mathcal{D}$, elle peut se développer en série entière dans un disque ouvert non vide centré en z_0 et inclus dans $\mathcal{D}$ selon $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$.*

Théorème 7 *1) Une série entière* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ *est holomorphe dans son disque de convergence et de dérivée*

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} n\ a_n(z-z_0)^{n-1}.$$

2) Une série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ *est indéfiniment dérivable dans son disque de convergence et de dérivée* $k-$*ième*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n\geq k} n(n-1)...(n-k+1)\ a_n(z-z_0)^{n-k}.$$

Ceci implique en particulier,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \qquad k \geq 0.$$

Corollaire 8 *Une fonction analytique est une fonction holomorphe.*

La réciproque est fausse pour les fonctions d'une variable réelle.
Mais pour les fonctions complexes, on a le théorème suivant.

Théorème 9 *Si* E *un ouvert dans* $\mathbb{C}$
alors toute fonction f *holomorphe dans* E *est analytique dans* E.