

Chapitre 3. Elasticité et viscoélasticité

I. NOTION DE CONTRAINTE

1. Repère d'espace

Un repère d'espace est défini par une origine O qui est fixe dans le référentiel et des axes de référence orthonormés c'est-à-dire orthogonaux et munis d'une unité de longueur (vecteur unitaire de norme égale à 1) qui vont permettre à l'observateur de juger dans quelle direction se trouve le point. Les trois axes forment un trièdre direct (voir figure 1.3).

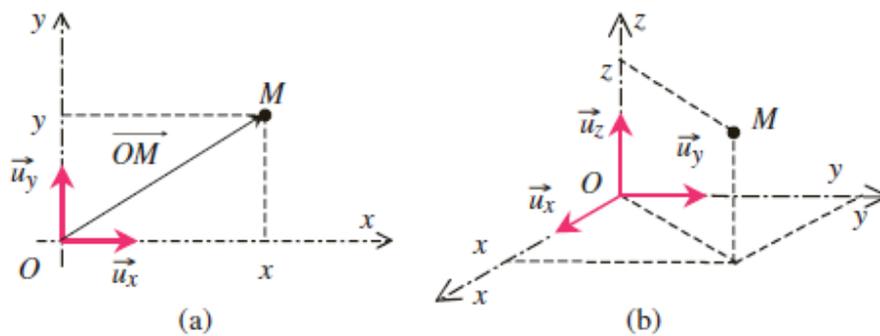


Figure 1- Repère dans un plan (a) et dans l'espace (b).

1.1 Le système de coordonnées cartésiennes

Dans le repère d'espace (O, x, y, z) défini précédemment (voir figure 10), un point M est repéré par ses coordonnées d'espace (x, y, z) correspondant à la mesure algébrique de la projection de M successivement sur les 3 axes du repère. La base associée à ce système d'axe est une base orthonormée qui ne change pas au cours du temps.

Il est pratique de positionner le point M en se donnant le vecteur position \vec{OM}

$$\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$: base cartésienne

1.2 Le système de coordonnées polaires

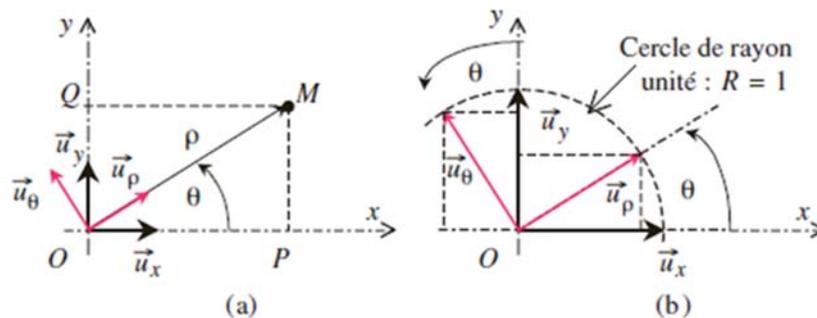


Figure 2- Les coordonnées polaires (ρ, θ) et la base associée $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$

Il existe d'autres systèmes permettant de positionner un point dans le repère d'étude comme par exemple le système de coordonnées polaires utilisé dans le cas où le point M est mobile dans un plan. Le point M est parfaitement repéré si on connaît la distance $OM = \rho$ et l'angle θ que fait le segment OM avec l'axe Ox (voir *figure 11 (a)*).

➤ Le point origine O correspond au « pôle » d'où le terme coordonné polaire. La longueur du segment OM correspond à sa *coordonnée radiale*. Elle est notée ρ (rhô : lettre grecque) ou r .

➤ L'autre coordonnée est la *coordonnée angulaire* également appelée angle polaire ou azimut et noté θ (thêta : lettre grecque).

Cet angle est mesuré par rapport à l'axe des abscisses Ox appelé alors axe polaire.

1.3 Liens entre les systèmes de coordonnées polaires et cartésiennes

Il est possible de passer d'une base d'un système de coordonnées à l'autre. En s'aidant de la *figure 11 (b)* les composantes des vecteurs unitaires et dans la base cartésienne sont:

$$\begin{aligned}\vec{u}_\rho &= (\cos\theta)\vec{u}_x + (\sin\theta)\vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta &= (-\sin\theta)\vec{u}_x + (\cos\theta)\vec{u}_y\end{aligned}$$

➤ Avec les notations de la *figure 11 (a)* nous pouvons écrire en utilisant le triangle rectangle (OPM):

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{OP}{OM} = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho \cos\theta \\ \sin\theta &= \frac{PM}{OM} = \frac{OQ}{\rho} = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho \sin\theta \\ \tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Pythagore on a :

$$OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

On en déduit alors les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

1.4 Le système de coordonnées cylindriques

Si le point doit être repéré dans l'espace il est possible d'utiliser les coordonnées cylindriques. Il suffit de compléter le système de coordonnées polaires par un troisième axe : l'axe Oz avec sa coordonnée cartésienne z (appelée la cote).

La projection P du point M dans le plan (O, x, y) est repérée en coordonnées polaires (ρ, θ) . La projection de M sur l'axe Oz donne la cote z (voir figure 12).

La base associée est composée de la base polaire et du vecteur unitaire suivant l'axe Oz .

Le vecteur position s'obtient en utilisant la relation de Chasles :

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$$

$$\|\vec{OM}\| = OM = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

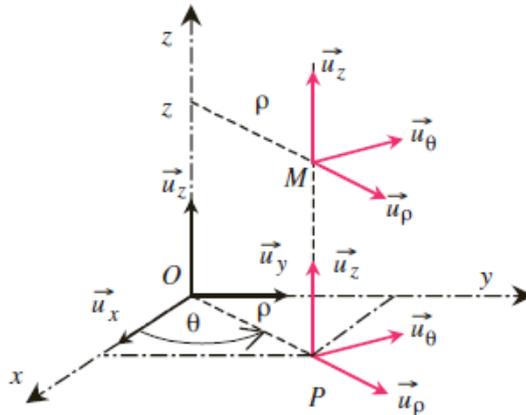


Figure 3- Le système de coordonnées cylindriques.

2. Vecteur contrainte

En chaque point M d'un solide, il existe des forces intérieures que l'on met en évidence en effectuant une **coupure** du solide, par une surface.

Le demi solide, est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures réparties sur la coupure.

Considérons un point M de S . Soit ΔS un élément infinitésimal de la surface S entourant M et \vec{n} le vecteur unitaire, perpendiculaire en M à S et dirigé vers l'extérieur.

Nous appellerons cet ensemble **facette** \vec{n} en M .

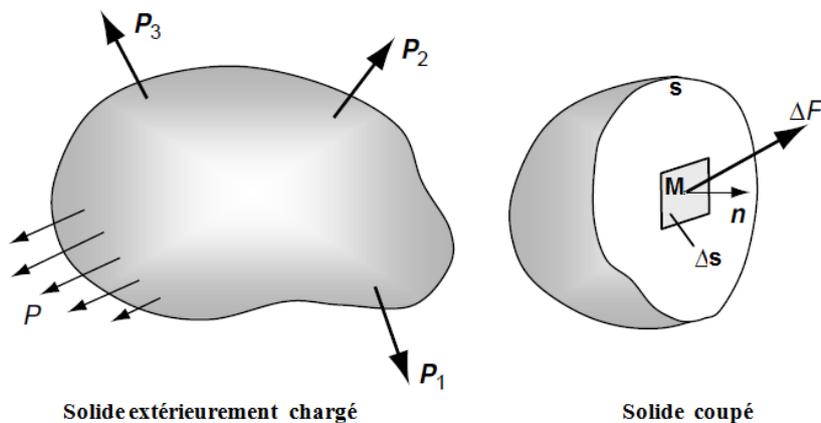


Figure 4- Solide soumis à un chargement extérieur et coupé

Soit ΔF la force qui s'exerce sur cette facette. On appelle **vecteur contrainte sur la facette** \vec{n} en M , la quantité :

$$\vec{T}(M, \vec{h}) = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

2.1. Contrainte normale et contrainte tangentielle et tenseur des contraintes

Le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante suivant \vec{n} et sa projection sur la facette (figure 4) :

$$\vec{T}(M, \vec{h}) = \sigma_n \vec{h} + \vec{\tau}_n$$

σ_n est la **contrainte normale** et τ_n est le **vecteur cisaillement** ou **contrainte tangentielle**. σ_n est une valeur algébrique positive (traction) ou négative (compression).

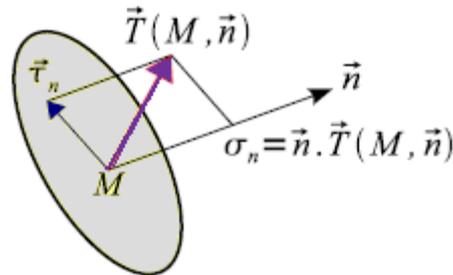


Figure 5- Vecteur contrainte sur la facette \vec{n} en M

La contrainte normale sur la facette \vec{n} en M est égale à :

$$\sigma_n = \vec{h} \cdot \vec{T}(M, \vec{h})$$

Considérons un élément cubique dans le repère cartésien (o, x, y, z)

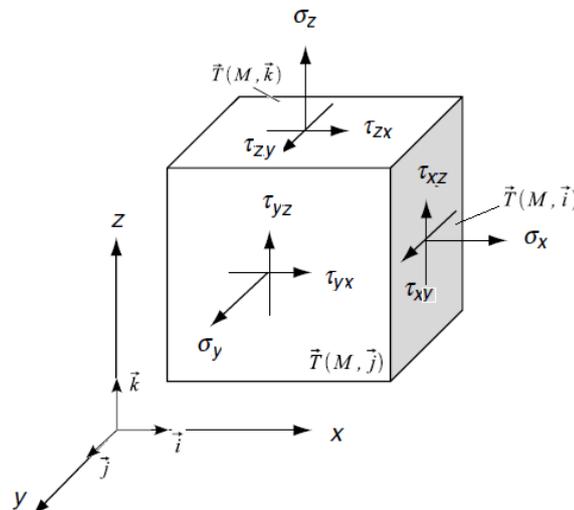


Figure 6 - Vecteur contrainte sur les facettes \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} en M

$$\vec{T}(M, \vec{i}) \quad \vec{T}(M, \vec{j}) \quad \vec{T}(M, \vec{k})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Tenseur des contraintes

Le premier indice représente l'axe perpendiculaire à la section où les contraintes tangentielles sont appliquées.

Le deuxième indice représente l'axe parallèle aux contraintes tangentielles.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: sont des contraintes normales aux facettes qui sont respectivement perpendiculaires aux axes x, y et z. Donc $\sigma_x // \vec{i}$; $\sigma_y // \vec{j}$; $\sigma_z // \vec{k}$.

$\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$ désignés par $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$: sont des contraintes tangentielles ;

2.2 Directions et contraintes principales

Le vecteur contrainte colinéaire avec $\vec{n} \longrightarrow$ le vecteur cisaillement nul sur la facette considérée. $T(M, \vec{n})$ satisfait la relation :

soit :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} \quad , \quad \text{Formule de Cauchy} \quad \vec{T}(M, \vec{n}) = [\sigma(M)] \vec{n}$$

$$[\sigma(M)] \vec{n} - \sigma_n \vec{n} = \vec{0}$$

σ_n est alors valeur propre du tenseur des contraintes et \vec{n} est le vecteur propre associé.

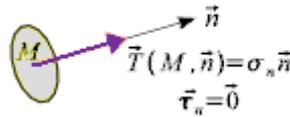


Figure 7- Face et contrainte principale en M

$$P(\sigma_n) = \det([\sigma(M)] - \sigma_n [I]) = 0 \text{ ou } [I] \text{ est la matrice unité de dimension 3}$$

Soit :

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_n \end{bmatrix} = -\sigma_n^3 + I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n + I_3 = 0$$

Il existe donc en M un repère orthonormé $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ tel que sur les facettes \vec{n}_1, \vec{n}_2 et \vec{n}_3 le vecteur cisaillement soit nul (figure 16).

Les directions \vec{n}_1, \vec{n}_2 et \vec{n}_3 sont les **directions principales**.

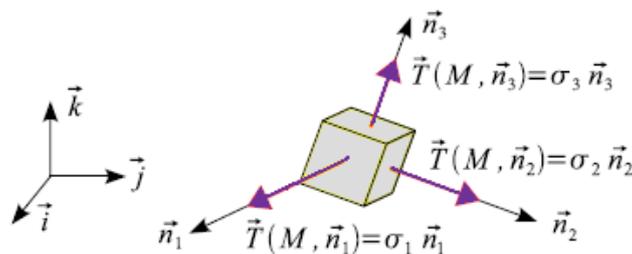


Figure 8 - Faces et contraintes principales en M

Dans le repère principal $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$, les composantes du vecteur contrainte sur la facette \vec{n} sont :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix}$$

où n_1, n_2 et n_3 sont les composantes de \vec{n} . Compte-tenu de la relation :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

2.3 Diagramme circulaire des états de contraintes (cercle de mohr)

Le diagramme circulaire ou cercle de mohr est une méthode graphique qui donne les contraintes pour les facettes considérées. Il est à noter que si la facette considérée tourne d'un angle θ , sur le cercle de mohr, cet angle est multiplié par 2.

Cas d'un état plan de contrainte

On assume que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

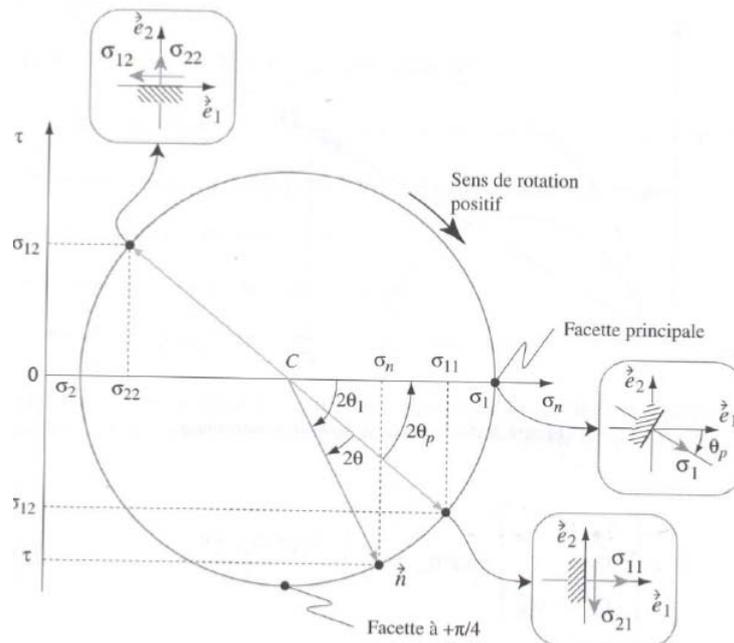


Figure 9- Faces et contraintes principales en MCas d'un état triaxial de contrainte

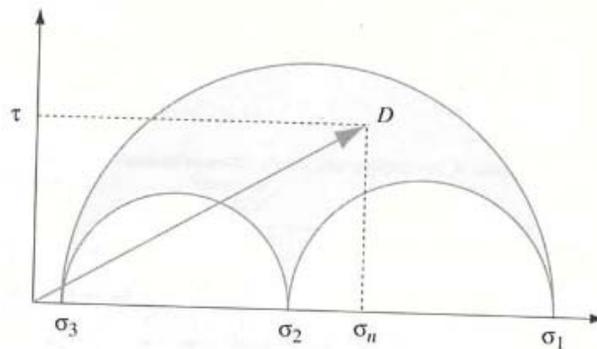


Figure 10 – tri- cercle de mohr (Cas d'un état triaxial de contrainte)

II. DEFORMATION D'UN SOLIDE

1. Configuration, vecteur déplacement

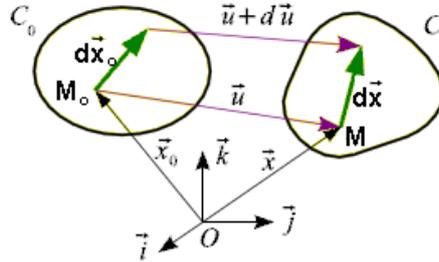


Figure 11 - Transformation d'un point et d'un vecteur

On appelle vecteur déplacement du point M_0 le vecteur :

$$\begin{aligned}\vec{u}(M_0; t) &= \overline{M_0 M} = \overline{OM} - \overline{OM_0} \\ &= u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \\ \overline{OM} &= \overline{OM_0} + \overline{M_0 M}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\vec{x} &= d\vec{x}_0 + d\vec{u}; \\ dy &= dy_0 + d\vec{v}; \\ dz &= dz_0 + d\vec{w}\end{aligned}$$

Où u , v et w sont des fonctions continues et dérivables de x_0 , y_0 et z_0 , d'où :

$$d\vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial u}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial u}{\partial z_0} dz_0;$$

$$d\vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial v}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial v}{\partial z_0} dz_0;$$

$$d\vec{w} = \frac{\partial w}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial w}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial w}{\partial z_0} dz_0;$$

Les coordonnées du point M s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} x(x_0; y_0; z_0; t) \\ y(x_0; y_0; z_0; t) \\ z(x_0; y_0; z_0; t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(x_0; y_0; z_0; t) \\ v(x_0; y_0; z_0; t) \\ w(x_0; y_0; z_0; t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 d\vec{x} &= d\vec{x}_0 + d\vec{u} = \frac{\partial x_0}{\partial x_0} d\vec{x}_0 + \frac{\partial u}{\partial x_0} d\vec{x}_0 + \frac{\partial u}{\partial y_0} d\vec{y}_0 + \frac{\partial u}{\partial z_0} d\vec{z}_0; \\
 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x_0}\right) d\vec{x}_0 + \frac{\partial v}{\partial y_0} d\vec{y}_0 + \frac{\partial w}{\partial z_0} d\vec{z}_0 \\
 d\vec{y} &= d\vec{y}_0 + d\vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x_0} dx_0 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y_0}\right) dy_0 + \frac{\partial w}{\partial z_0} dz_0; \\
 d\vec{z} &= d\vec{z}_0 + d\vec{w}_0
 \end{aligned}$$

Sous forme matricielle

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix}; \quad [L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{Bmatrix}$$

1.1 Déformation plane

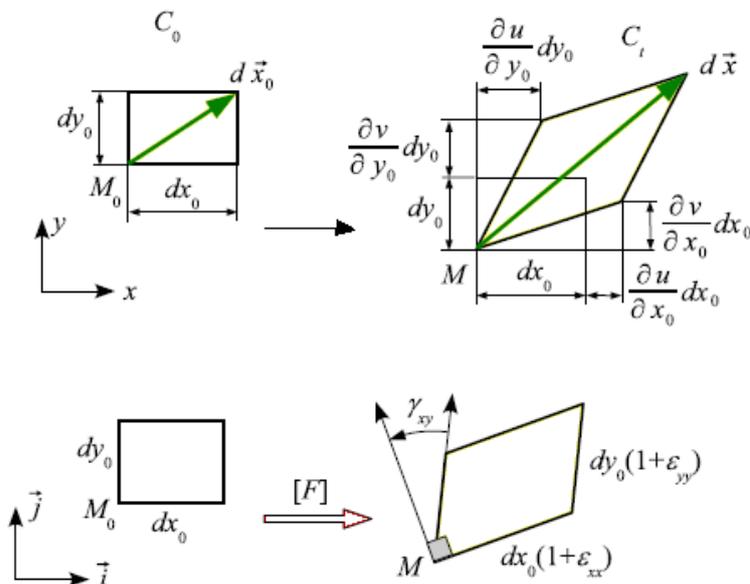


Figure 12 - Déformation plane : transformation d'un rectangle construit sur les axes \vec{i} et \vec{j}

1.2 Cas de déformation dans l'espace, tenseur des déformations

Le tenseur des déformations s'écrit de façon générale dans le repère cartésien.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_{xx} & \Omega_{yx} & \Omega_{zx} \\ \Omega_{xy} & \Omega_{yy} & \Omega_{zy} \\ \Omega_{xz} & \Omega_{yz} & \Omega_{zz} \end{bmatrix} = [L] ;$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x_0}; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y_0}; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z_0}$$

$$\Omega_{xx} = \Omega_{yy} = \Omega_{zz} = 0 ; \varepsilon_{yx} + \Omega_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y_0} - \frac{\partial v}{\partial x_0} \right)$$

2. Directions et valeurs principales de déformation

En M, dans le repère principal $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$, le tenseur des déformations se réduit à :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix} = [\varepsilon]_{\{M, \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\}}$$

ou $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}$ et ε_{III} sont les déformations principales.

$(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ sont les directions principales.

Remarque : Les dilatations principales sont :

$$\lambda_1 = 1 + \varepsilon_I, \lambda_2 = 1 + \varepsilon_{II}, \lambda_3 = 1 + \varepsilon_{III}$$

3. Axisymétrie

Le tenseur des déformations s'écrit de façon générale dans le système d'axes cylindriques (r, θ, z) :

Il comporte généralement six composantes non nulles tout comme le tenseur des contraintes exprimé dans le repère cartésien. L'axisymétrie s'applique aux structures géométriquement et matériellement de révolution, les chargements l'étant également, Oz étant supposé être l'axe de révolution de la structure.

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)$$

4. Cercle de Mohr des déformations

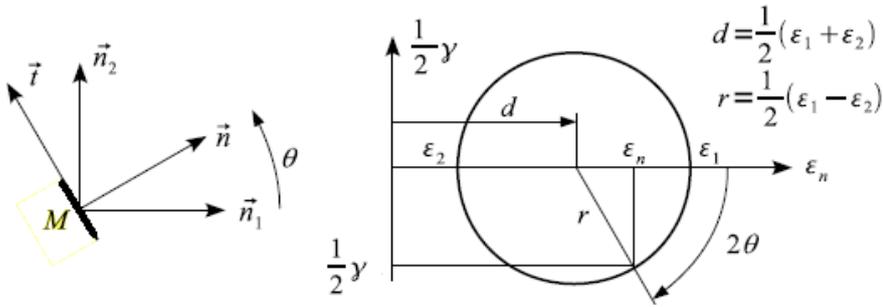


Figure 13 - Cercle de Mohr des déformations

III RELATIONS ENTRE CONTRAINTES ET DEFORMATIONS (LOI DE HOOKE)

1. Relations contraintes-déformations

On ne considère ici que les **matériaux homogènes** : les caractéristiques du matériau ne dépendent pas du point étudié. On se limite également au **domaine élastique linéaire**, les contraintes varient proportionnellement à la déformation.

Les déformations doivent être suffisamment petites de manière à rester dans la partie linéaire de la loi constitutive et présenter le même comportement en traction et en compression. La loi reliant les déplacements aux déformations est également linéaire : on se place donc dans le cadre de la mécanique linéaire. Le tenseur des contraintes, symétrique, est entièrement déterminé en tout point par la connaissance de six composantes sur les neuf, que l'on représente vectoriellement

$$\{\sigma\}^T = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})$$

Le tenseur des déformations est lui aussi entièrement déterminé en tout point par la connaissance de six composantes sur les neuf, que l'on représente vectoriellement

$$\{\varepsilon\}^T = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz})$$

La relation qui relie ces deux « vecteurs » se note sous la forme d'une matrice carrée de dimension 6 : c'est la **matrice de Hooke** dite aussi **loi constitutive**.

$$\{\sigma\} = H\{\varepsilon\}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

IV VISCOELASTICITE

1. Définition

La viscoélasticité est la propriété des matériaux qui présentent des caractéristiques à la fois visqueuses et élastiques, lorsqu'ils subissent une déformation. Les matériaux visqueux, comme le miel, résistent à un écoulement en cisaillement et présentent une déformation qui augmente linéairement avec le temps lorsqu'une contrainte est appliquée. Les matériaux élastiques se déforment lorsqu'ils sont contraints, et retournent rapidement à leur état d'origine une fois la contrainte retirée. En rhéologie, le comportement d'un matériau viscoélastique linéaire est ainsi intermédiaire entre celui d'un solide élastique idéal symbolisé par un ressort de module E (ou G) et celui d'un liquide visqueux newtonien symbolisé par un amortisseur de viscosité η . L'élasticité d'un matériau traduit sa capacité à conserver et restituer de l'énergie après déformation. La viscosité d'un matériau traduit sa capacité à dissiper de l'énergie. Les polymères, en fait la plupart des matériaux, ont un comportement viscoélastique.

Différents modèles permettent de décrire la viscoélasticité linéaire. Le **modèle de Maxwell** est adapté au liquide viscoélastique. Le **modèle de Kelvin-Voigt** quant à lui est un modèle élémentaire de solide viscoélastique. Il existe également respectivement pour ces deux cas le **modèle de Zener** et celui de **Burgers**.

2. Essai à vitesse de déformation constante

Si l'on impose une vitesse de déformation constante, la formule (1) conduit à l'expression de la vitesse de variation de la contrainte :

$$\dot{\sigma}(t) = E(t) \dot{\varepsilon}_0 \quad (1)$$

Cette expression peut aussi s'écrire :

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E(t) \quad (2)$$

de sorte que la pente d'écrouissage est alors égale au module de relaxation.

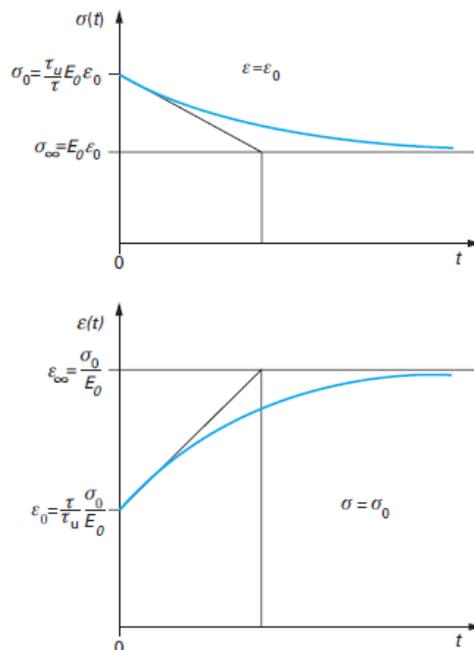


Figure 14 – Relaxation et fluage d'un matériau linéaire standard, avec un temps de relaxation