UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA 2019/2020
FACULTE DES SCIENCES
Départ. SM 1er Année LMD

Série 4 : Les conducteurs en équilibre électrostatique

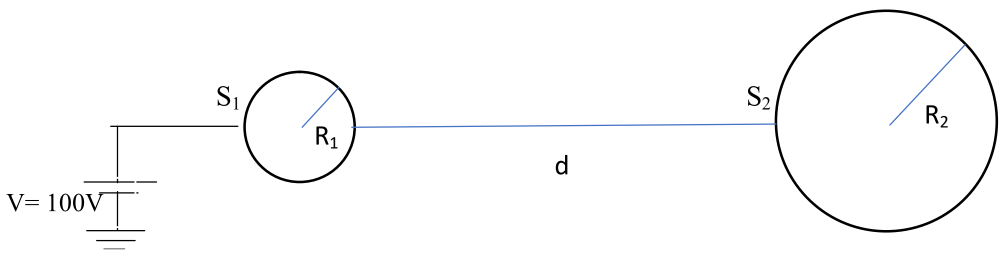
EX.1

Trouver la charge acquise par une sphère conductrice **S** de rayon **R = 50cm** lorsqu'elle est portée à un potentiel **V = 200V**.

EX.2

- Trouver la charge portée par chacune des deux sphères: $\mathbf{S_1}$ de rayon R_1=50cm et $\mathbf{S_2}$ de rayon R_2= 1m; sachant que la première sphère $\mathbf{S_1}$ est portée au potentiel V = 220V (figure).

Les deux sphères sont supposées très loin l'une de l'autre pour pouvoir négliger l'influence mutuelle.



EX3

Une sphère $\mathbf{S_1}$de rayon $\mathbf{R_1=50cm}$, est reliée d'abord à un générateur de tension $\mathbf{V_1=100V}$. La sphère est ensuite débranchée du générateur et entourée par une sphère creuse $\mathbf{S_2}$de rayon $\mathbf{R_2=1m}$.

1. Déterminer la charge portée par la sphère $\mathbf{S_1}$ de rayon $\mathbf{R_1}$.
2. Déterminer le champ électrique entre les deux sphères en utilisant le théorème de Gauss.
3. Déduire le potentiel **V(r)** entre les deux sphères.
4. Déduire le potentiel $\mathbf{V_2}$ de la sphère creuse $\mathbf{S_2}$de rayon $\mathbf{R_2}$.
5. Déduire la capacité du condensateur formé ainsi par les deux sphères.
6. Que devient la valeur de cette capacité si $\mathbf{R_2}$ tend vers $\mathbf{R_1}$.

Solution Série 4 : Les conducteurs en équilibre électrostatique

EX.1

On a une sphère conductriceS de rayon **R** reliée à un potentiel **V = 200 V** (fig.1) ⇒ **S** porte un potentiel **V(R) = 200V**

Afin de pouvoir calculer la charge **Q** que porte cette sphère **S**, il faut déterminer tout d'abord la relation de son potentiel **V**.

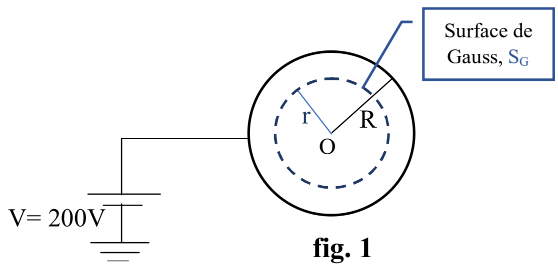


fig. 1

- Selon le théorème de Gauss on a :

$$\phi = \oiint \vec{E}\,.\overrightarrow{dS} = E.S_G = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Puisque le conducteur est sphérique, la surface de Gauss S_G est une sphère de rayon **r** (fig.1)

d'où : $S_G = 4\pi r^2 \Rightarrow E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

D'un autre côté, on a :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int_V^\infty dV = -\int_R^\infty E(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$\Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ (le potentiel à l'infini est nul, V(∞)=0).

On retrouve enfin la relation de la charge Q que porte ce conducteur sphérique :

$$\boxed{Q = 4\pi\varepsilon_0 RV}$$

$$AN: Q = 11{,}1\,.10^{-9}C = 11{,}1nC$$

Remarque : On définit la capacité d'un conducteur par la relation: $C = \frac{Q}{V}$; dans notre cas (un conducteur sphérique) la capacité prendra la relation :$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$. On remarque clairement que **C** ne dépend que de la géométrie du conducteur (son rayon de courbure **R**)

EX. 2

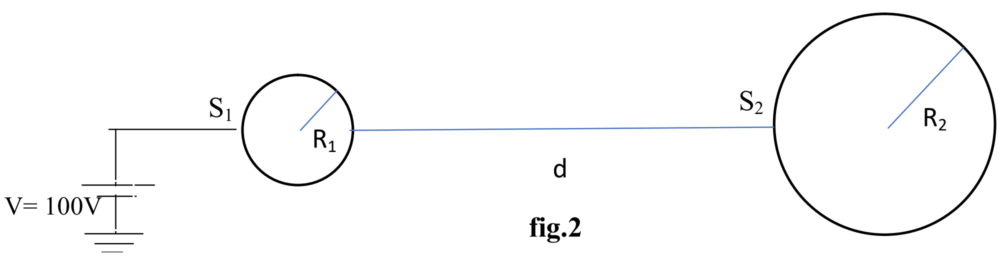


fig.2

- Les deux sphères sont en contact $\Rightarrow$ elles possèdent le même potentiel, $\mathbf{V_1}=\mathbf{V_2}=\mathbf{V}=220V$.
- Le potentiel $\mathbf{V_1}$de la sphère $\mathbf{S_1}$, de rayon $\mathbf{R_1}$ qui porte une charge $\mathbf{Q_1}$, est définit par :

$$V = V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1} - \frac{Q_2}{d}\right)$$

Le terme $\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}$ désigne l'influence de la sphère $\mathbf{S_2}$ sur celle de $\mathbf{S_1}$. Seulement, selon l'énoncé de l'exercice : d>>$R_1 \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} \ll \frac{Q_2}{d}$; ainsi la relation du potentiel devient

$$V = V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}(*)$$

- Le potentiel $\mathbf{V_2}$ de la sphère $\mathbf{S_2}$, de rayon $\mathbf{R_2}$ qui porte une charge $\mathbf{Q_2}$, est définit par :

$$V = V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2}{R_2} - \frac{Q_1}{d}\right)$$

Le terme $\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 d}$ désigne l'influence de la sphère S_1 sur celle de S_2 et puisque d >> $R_2 \Rightarrow \frac{Q_2}{R_2} \ll \frac{Q_1}{d}$;

ainsi la relation du potentiel devient : $V = V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ $(**)$

Ainsi, on peut déduire à partir des relations (*) & (**) les charges Q_1 et Q_2 :

$$\boxed{Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V = C_1 V} \quad \& \quad \boxed{Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2 V = C_2 V}$$

AN : Q_1=12.2nC & Q_2 = 24.4nC.

Remarque : Il existe une relation de proportionnalité entre Q_1& Q_2 qu'on peut déduire :

On a trouvé que : $V = V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$

D'où :$\frac{Q_2}{R_2} = \frac{Q_1}{R_1} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{R_2}{R_1}$

Dans le cas de notre exercice où $R_2 = 2R_1$ on retrouve une relation entre les deux charges égale à :

$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{R_2}{R_1} = 2 \Rightarrow Q_2 = 2\,Q_1$.

EX. 3

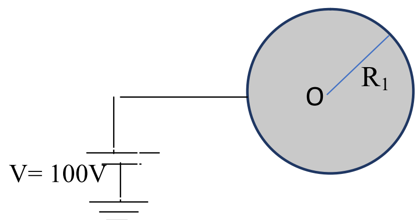


fig. 3

Calcul de la charge Q_1 portée par la sphère S_1

La sphère est reliée d'abord à un générateur de tension $\mathbf{V_1=100V}$ (fig.3)

⇒ elle possède une capacité : $C_1 = \frac{Q_1}{V_1}$

En plus, le conducteur est de forme sphérique d'où :

$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} = 4\pi\varepsilon_0 R_1$ (remarque EX.1)

Ainsi : $\boxed{Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V_1}$

AN : $Q_1 = 5.55$ nC

1. Calcul du champ E(r) entre les 2 sphères via le théorème de Gauss : pour $R_1 < r < R_2$

La sphère S_1 est ensuite débranchée du générateur et entourée par une sphère creuse **S_2** de rayon **R_2=1m** (fig.4).

La symétrie sphérique du conducteur impose au champ E une variation radiale (E(r)).

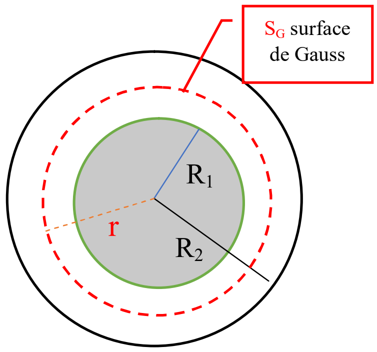


fig.4

Selon le théorème de Gauss on a : $\phi = \oiint \vec{E}\,.\vec{dS} = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$

Seulement : $\phi = \oiint \vec{E}\,.\vec{dS} = \oiint E.dS = E \oiint dS = ES_G = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$

La surface de Gauss S_G est une sphère de rayon r, d'où : $S_G = 4\pi r^2$

Le flux devient : $\phi = ES_G = E.4\pi r^2 = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}$

La somme des charges qu'enveloppe la surface de gauss S_G, est celle de la sphère S_1 : $\sum Q_i = Q_1$.

$\Rightarrow E.4\pi r^2 = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$

Ainsi, la relation du champ E(r) entre les deux sphères devient :

$$\boxed{E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

2. Calcul du potentiel V(r) entre les deux sphères : pour $R_1 < r < R_2$

On a: $E(r) = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V(r) = -\int E(r)\,dr = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int -\frac{dr}{r^2}$

d'où : $V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_1$

<u>C_1=?</u>

La sphère **S_1** de rayon **R_1**, porte un potentiel constant égale à $V_1 = 100$V

$$\Rightarrow V(R_1) = V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + C_1 \Rightarrow C_1 = V_1 - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

Ainsi, la relation du potentiel devient :

$$\boxed{V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right) + V_1}$$

3. Calcul du potentiel de la sphère S_2

On note ce potentiel $\mathbf{V_2}$.

On a trouvé que le potentiel entre les 2 sphères s'écrit :

$$V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right) + V_1$$

Ainsi, le potentiel de la sphère $\mathbf{S_2}$ (pour une valeur de $\mathbf{V(r)}$ qui correspond à $\mathbf{r} = \mathbf{R_2}$) devient :

$$V_2 = V(R_2) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) + V_1$$

d'où la relation du potentiel de $\mathbf{S_2}$:

$$\boxed{V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) + V_1}$$

4. Calcul de la capacité du condensateur

La sphère $\mathbf{S_1}$ porte une charge positive $\mathbf{Q_1}$, distribuée essentiellement sur sa surface (fig.5). Cependant, la sphère $\mathbf{S_2}$ qui est initialement neutre (nombre de charges positives = nombre de charges négatives) entoure entièrement la sphère $\mathbf{S_1} \Rightarrow$ il existe une influence totale entre les deux sphères (les charge positives à la surface extérieure de $\mathbf{S_1}$ vont attirer les charges négatives de la sphère $\mathbf{S_2}$, ces dernières vont se distribuées sur la surface intérieure de $\mathbf{S_2}$ (fig. 5). Ainsi, deux armatures de forme sphérique vont se créer pour nous former un condensateur sphérique de capacité **C** et de charge **Q**.

- Si $\mathbf{Q_2}$ est la charge distribuée à la surface intérieure de $\mathbf{S_2}$, alors, on a :
  $Q = Q_1 = |Q_2|$(sachant que : $Q_2 = -Q_1$)
- La différence de potentiel entre les deux sphères est : $V = V_2 - V_1$

Alors on écrit la capacité C :$C = \frac{Q_1}{V} = \frac{Q_1}{V_2 - V_1}$

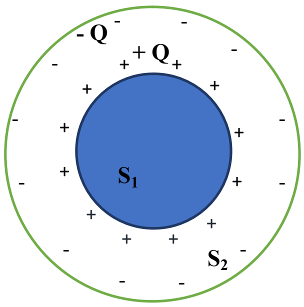


fig.5

Comme on a trouvé déjà que : $V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2-R_1}{R_1 R_2}\right) + V_1$

Ainsi on peut extraire la capacité d'un condensateur sphérique :

$$\boxed{C = \frac{Q_1}{V_2 - V_1} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right)}$$

AN : C = 0.11 nF

5. **Calcul de la capacité Ć quand R_2 tend vers R_1**

On a trouvé que : $C = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1 R_2}{R_2-R_1}\right)$

Si $R_2 \rightarrow R_1 \Longrightarrow \begin{cases} R_2 - R_1 \approx e \ll \\ R_1 R_2 \approx R^2 \end{cases}$

D'où ; $\acute{C} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^2}{e} = \frac{4\pi R^2 \varepsilon_0}{e}$

Seulement : $S = 4\pi R^2 \Longrightarrow$ la capacité prend alors la forme :

$$\boxed{\acute{C} = \frac{S\varepsilon_0}{e}}$$ (Similaire à celle d'un condensateur plan).

- Ainsi, Si $R_2 \rightarrow R_1$ la relation d'un condensateur sphérique C tend vers celle d'un condensateur plan Ć.