Faculté des Sciences
Département de Physique

Thermo et Phys Stat
Master I

Série de TD
Statistique de Fermi-Dirac

Exo I Gaz de Fermions fortement Dégénéré ;
étude directe d'un gaz de Fermions à $T = 0°K$

Soit un gaz de Fermions, supposés sans interaction mutuelle, de spin $1/2$ (des électrons par exemple) enfermés dans un volume V. Soient ε_i les niveaux d'énergie des particules.

1) En utilisant le principe d'exclusion de Pauli, montrer qu'au zéro Absolu, les particules occupent les niveaux ε_i jusqu'à une énergie ε_F^0 appelée Energie de Fermi.

2) En déduire que l'impulsion des particules $p = \|\vec{p}\|$ est limitée supérieurement par une quantité p_f^0. Dans l'espace des impulsions, toutes les particules ont leur impulsion à l'intérieur d'une sphère de rayon p_f^0, appelée sphère de Fermi.

3°) Par un raisonnement simple sur l'espace de Phase calculer p_f^0, rayon de la sphère de Fermi.
En déduire l'expression de ε_F^0.

4°) En déduire la répartition des électrons au zéro absolu. On représentera ε_i en abscisses et N_i en ordonnées, N_i étant le nombre de particules sur le niveau i.

Exo II. Gaz de Fermions fortement dégénéré : Calcul de l'impulsion moyenne et de l'énergie moyenne au zéro Absolu.

1°) En utilisant un raisonnement analogue à celui de l'exercice précédent, calculer l'impulsion moyenne d'une particule, $\bar{p}$, au zéro Absolu.

2°) Calculer de même l'énergie moyenne d'une particule. Quelle est l'énergie du Gaz de fermions au zéro Absolu en fonction de ε_F^0 ?

Exo III Répartition des électrons dans les métaux : estimation de l'énergie de Fermi.

On considère une masse M de métal occupant un volume V, se trouvant à la Température Thermodynamique et à la pression atmosphérique. En première approximation, les ions positifs formant ce métal ont pour effet de créer un puits de potentiel empêchant les électrons de quitter celui-ci. On négligera toute interaction électron-électron.

Le nombre d'électrons N_i se trouvant sur le niveau ε_i à l'équilibre a pour expression :

$$N_i = \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon_i - \nu) + 1} \quad ; \quad \beta = 1/kT$$

On pose $\nu = \beta\varepsilon_F$, où ε_F est une fonction dépendant des variables thermodynamiques du système.

1°) En admettant que $\varepsilon_F(T)$ tend vers une limite finie ε_F^0 lorsque $T \to 0$, représenter $N_i = f(\varepsilon_i)$ à $T = 0°K$. Interpréter physiquement cette courbe.