

ose que tout l'hy-
ment ionisé et que
nsidère alors l'é-
pérature au centre

aine blanche.

d'électrons comme

en fonction de N_0
de masse uniforme,
qu'il y a équil-
st stable) pour un
résultat au rayon
us avons développé

de Fermi p_F du gaz
a concentration en
e. Pour chercher à
ent, on se place à
électrons devient
geable. On a alors

ent moyenne $\langle p \rangle$ et

rra utiliser l'hy-
e densité de masse

trarelativiste, il
là de laquelle une
terminer le nombre
er M_0 . Comparer la
tique que l'on ob-
(soit 1,44 fois la

pérature. Calculer
d'infinitésimal.

2. Le gaz parfait de Bose

Nous allons à présent considérer N particules, de spin nul ou entier (bosons), de masse m (sauf pour les photons) et sans interactions, enfermés dans un volume V . Nous supposons que ce système est en équilibre avec un thermostat à la température T . Nous allons étudier quelques propriétés de ce gaz parfait de bosons en passant brièvement sur les démonstrations qui sont similaires à celles que nous avons présentées précédemment pour le gaz de Fermi.

2.a Première approche

Nous allons procéder ici de façon analogue à celle que nous avons décrite dans la section 1a pour les fermions. Comme nous l'expliciterons plus loin, cette approche n'est valable que si le niveau d'énergie à une particule le plus bas n'est pas très occupé, i.e. si la température n'est pas trop petite. Par commodité, nous choisirons le niveau le plus bas comme origine de l'échelle des énergies. En effet, pour un système macroscopique, ce niveau correspond à une valeur extrêmement faible de l'énergie (cf. chapitre 2, section 1c). Il faut néanmoins garder à l'esprit que l'impulsion d'une particule enfermée dans un volume fini ne peut pas être nulle à cause du principe d'incertitude de Heisenberg. Ceci étant posé, le raisonnement tenu dans la section 1a est valable pour les bosons à condition de remplacer la formule 3 par la distribution de Bose-Einstein :

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon - \mu}{kT}\right) - 1} \quad (75)$$

Comme le nombre d'occupation, donné par l'expression ci-dessus, ne peut être négatif, on en déduit que le potentiel chimique μ doit toujours être inférieur à l'énergie du niveau le plus bas, ϵ_0 , que nous avons choisi nul par convention. Par conséquent, $\mu \leq 0$. L'évolution du potentiel chimique en fonction de la température du thermostat est montrée schématiquement dans la figure 1 dont nous préciserons certains détails par la suite.

Comme la démarche est analogue à celle de la section 1a, puisqu'il suffit de remplacer l'expression (3) par (75) (i.e. de changer un signe + en signe -), nous ne présenterons ici que les principaux résultats : Le potentiel chimique est défini par l'équation :

$$N = 2\pi \frac{gV}{h^3} (2m)^{3/2} (kT)^{3/2} J_{1/2}(\eta) \tag{76}$$

analogue à (15), où $\eta = \frac{\mu}{kT}$ et où $J_\nu(\eta)$ est une intégrale définie par :

$$J_\nu(\eta) = \int_0^\infty \frac{x^\nu dx}{\exp(x-\eta) - 1} \tag{77}$$

que l'on appelle intégrale de Bose. L'énergie interne du système est donnée par :

$$E = 2\pi \frac{gV}{h^3} (2m)^{3/2} (kT)^{5/2} J_{3/2}(\eta) \tag{78}$$

La pression du gaz de Bose vaut :

$$P = \frac{4\pi}{3} \frac{g}{h^3} (2m)^{3/2} (kT)^{5/2} J_{3/2}(\eta) \tag{79}$$

L'équation d'état du gaz de Bose est la même que celle du gaz de Fermi ou d'un gaz classique, elle est donnée par l'expression (21). Enfin le grand potentiel a pour expression :

$$\Psi = -PV = -\frac{4\pi}{3} \frac{gV}{h^3} (2m)^{3/2} (kT)^{5/2} J_{3/2}(\eta) \tag{80}$$

L'entropie, elle, est toujours donnée par la relation (27).

2.b Utilisation de la fonction de partition grand canonique

Tout comme le gaz de Fermi, le gaz de Bose peut être traité en utilisant l'ensemble grand canonique. La démarche est analogue à celle de la section 1c et nous ne signalerons ici que les différences. La première apparaît dans l'équation (48) où la somme sur le nombre d'occupation ne va plus de 0 à 1, comme pour les fermions, mais de 0 à l'infini, puisque plusieurs bosons peuvent occuper le même micro-état à une particule. La fonction de partition grand canonique s'écrit par conséquent :

$$\Xi = \prod_i \sum_{n_i=0}^\infty \exp\left(\frac{\mu n_i - \epsilon_i n_i}{kT}\right) \tag{81}$$

La somme qui intervient dans l'équation ci-dessus est une progression géomé-

trique de raison
résultat vaut :

$$\sum_{n_i=0}^\infty$$

Par conséquent :

Le grand potentiel

$$\Psi = -$$

En utilisant les
ques quantités ther

$$P = kT$$

$$N =$$

$$S = kT \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)$$

$$= -k \sum_i \frac{1}{e^{\dots}}$$

$$E = kT^2 \left(\frac{\partial L_c}{\partial T} \right)$$

Les résultats de
dans la mesure où
l'état d'énergie l

(76)

e définie par :

(77)

$$\sum_{n_i=0}^{\infty} \exp \left(\frac{\mu n_i - \epsilon_i n_i}{kT} \right) = \frac{1}{1 - \exp \left(\frac{\mu - \epsilon_i}{kT} \right)} \quad (82)$$

u système est donnée

(78)

Par conséquent :

$$\Xi = \prod_i \frac{1}{1 - \exp \left(\frac{\mu - \epsilon_i}{kT} \right)} \quad (83)$$

$$\text{Log } \Xi = - \sum_i \text{Log} \left\{ 1 - \exp \left(\frac{\mu - \epsilon_i}{kT} \right) \right\} \quad (84)$$

(79)

Le grand potentiel vaut :

$$\Psi = -kT \text{Log } \Xi = kT \sum_i \text{Log} \left\{ 1 - \exp \left(\frac{\mu - \epsilon_i}{kT} \right) \right\} \quad (85)$$

e du gaz de Fermi ou
21). Enfin le grand

En utilisant les expressions (40-43) du chapitre 9 on peut calculer quelques quantités thermodynamiques :

(7) (80)

$$P = kT \left(\frac{\partial \text{Log } \Xi}{\partial V} \right)_{T, \mu} = - \sum_i \frac{1}{\exp \left(\frac{\epsilon_i - \mu}{kT} \right) - 1} \frac{d\epsilon_i}{dV} \quad (86)$$

27).

$$N = kT \left(\frac{\partial \text{Log } \Xi}{\partial \mu} \right)_{T, V} = \sum_i \frac{1}{\exp \left(\frac{\epsilon_i - \mu}{kT} \right) - 1} \quad (87)$$

ique

être traité en uti-
alogue à celle de la
ces. La première ap-
d'occupation ne va
infini, puisque plu-
particule. La fonc-
t :

$$S = kT \left(\frac{\partial \text{Log } \Xi}{\partial T} \right)_{V, \mu} + k \text{Log } \Xi \\ = -k \sum_i \frac{\left(\frac{\mu - \epsilon_i}{kT} \right)}{\exp \left(\frac{\epsilon_i - \mu}{kT} \right) - 1} - k \sum_i \text{Log} \left\{ 1 - \exp \left(\frac{\mu - \epsilon_i}{kT} \right) \right\} \quad (88)$$

(81)

$$E = kT^2 \left(\frac{\partial \text{Log } \Xi}{\partial T} \right)_{V, \mu} + kT \mu \left(\frac{\partial \text{Log } \Xi}{\partial \mu} \right)_{T, V} = \sum_i \frac{\epsilon_i}{\exp \left(\frac{\epsilon_i - \mu}{kT} \right) - 1} \quad (89)$$

ne progression géomé-

Les résultats de la section 2b sont équivalents à ceux de la section 2.a dans la mesure où la substitution (60) est valable. Cela n'est vrai que si l'état d'énergie le plus bas ($\epsilon_0=0$) n'est que très faiblement occupé. En

effet à cause du terme $\sqrt{\epsilon}$ présent sous l'intégrale (60), le terme correspondant à $\epsilon = 0$ ne contribue pas à l'intégrale alors qu'il contribue dans les sommes (86-89). Si la proportion des N particules occupant le micro-état $\epsilon = 0$ est importante, l'erreur commise est grande et il n'est pas possible de faire la substitution (60). Le problème peut se poser pour les bosons car plusieurs particules peuvent occuper ce micro-état, ce qui n'est pas le cas pour un gaz de Fermi à cause du principe d'exclusion de Pauli.

Lorsque la température n'est pas trop proche du zéro absolu (cf. figure 1), le potentiel chimique devient très négatif et $-\frac{\mu}{kT} \gg 1$. Comme pour les fermions on a alors :

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon_i - \mu}{kT}\right) - 1} \approx \frac{\mu}{e^{kT}} e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}} \quad (90)$$

On retrouve la distribution de Maxwell-Boltzmann, ce qui signifie que le gaz a un comportement classique. Dans cette situation, $\langle n_i \rangle \ll 1$. Nous obtenons donc la justification formelle des conditions d'application de l'approximation qui consiste à traiter classiquement un gaz parfait.

A partir de l'équation (88) on peut, comme pour les fermions (section 1.c), calculer l'entropie en fonction du nombre moyen d'occupation des micro-états (équation 75). On trouve :

$$S = k \sum_i [(1 + \langle n_i \rangle) \text{Log} (1 + \langle n_i \rangle) - \langle n_i \rangle \text{Log} \langle n_i \rangle] \quad (91)$$

Cette expression peut être utilisée pour définir l'entropie d'un gaz de Bose hors d'équilibre.

2.c Condensation de Bose-Einstein

Contrairement au cas des fermions, nous avons vu que l'on peut mettre un nombre quelconque de bosons dans un micro-état particulier. Lorsque la température du système est nulle, tous les bosons doivent se trouver dans l'état de plus basse énergie, $\epsilon = 0$. Cet état est exclu dans l'expression (76) et cette dernière n'est donc égale qu'au nombre de particules qui ne sont pas dans l'état $\epsilon = 0$. Appelons $N_{\epsilon > 0}$ ce nombre. Nous avons :

$$N_{\epsilon > 0} = 2\pi \frac{gV}{h^3} (2m)^{3/2} (kT)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{\exp\left(\frac{\epsilon - \mu}{kT}\right) - 1} \quad (92)$$

Le nombre de bosons

Lorsque T est élevée convenablement le : bonne approximation sont dans le micro-

d'où :

puisque N est grand tout en restant très micro-état d'énergie faible en valeur $N_{\epsilon=0} = 10^{20}$, on voit donc considérer qu'conditions. Dans ces excités à une part

N_{ϵ}

L'intégrale définie

D'où :

On appelle température Elle représente : valable (il ne fondamental $\epsilon = 0$

soit :

le terme correspondant à l'état $\epsilon = 0$ contribue dans l'occupation du micro-état et il n'est pas possible de se poser pour les autres états, ce qui n'est pas en violation de Pauli. Le zéro absolu est atteint si $-\frac{\mu}{kT} \gg 1$.

(90)

ce qui signifie que le nombre $\langle n_1 \rangle \ll 1$. Nous obtenons l'application de l'approximation de l'approximation.

pour les fermions (section sur l'occupation des états)

log $\langle n_1 \rangle$] (91)

le d'un gaz de Bose

que l'on peut mettre particulièrement. Lorsque les bosons doivent se trouver dans l'état exclus dans l'expression du nombre de particules. Nous avons :

(92)

- 1

Le nombre de bosons dans l'état $\epsilon = 0$ est, quant à lui, égal à :

$$N_{\epsilon=0} = N - N_{\epsilon>0} \quad (93)$$

Lorsque T est élevée, $N_{\epsilon=0} \ll N_{\epsilon>0}$, et l'équation (76) permet de calculer convenablement le nombre total de particules (la substitution (60) est une bonne approximation). A T=0, ce n'est plus le cas car toutes les particules sont dans le micro-état correspondant à $\epsilon = 0$, par conséquent :

$$\langle n_0 \rangle = N = \frac{1}{\exp(-\frac{\mu}{kT}) - 1} \quad (94)$$

d'où :

$$-\frac{\mu}{kT} = \text{Log} \left(1 + \frac{1}{N} \right) \approx \frac{1}{N} \quad (95)$$

puisque N est grand. On en conclut qu'à T = 0, $\mu = 0$. Lorsque T augmente, tout en restant très basse, la majorité des bosons se trouve encore dans le micro-état d'énergie $\epsilon = 0$ et le potentiel chimique est négatif, mais très faible en valeur absolue. Par exemple, si $N \sim N = 6,02 \cdot 10^{23}$ et si $N_{\epsilon=0} = 10^{20}$, on voit que $\mu \sim 10^{-20} kT$, ce qui est extrêmement petit. On peut donc considérer que le potentiel chimique est pratiquement nul dans ces conditions. Dans ce cas, le nombre de bosons qui se trouvent dans les états excités à une particule est donné par :

$$N_{\epsilon>0} = 2\pi \frac{gV}{h^3} (2m)^{3/2} (kT)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{\exp(x) - 1} \quad (96)$$

L'intégrale définie ci-dessus vaut (cf. appendice A6) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2,612$.

D'où :

$$N_{\epsilon>0} = 2,612 \frac{gV}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2} \quad (97)$$

On appelle température de Bose, T_B , la valeur de T pour laquelle $N_{\epsilon>0} = N$. Elle représente la température à partir de laquelle l'expression (76) est valable (il ne reste alors qu'une quantité infime de bosons dans l'état fondamental $\epsilon = 0$). Elle est donnée par :

$$N = 2,612 \frac{gV}{h^3} (2\pi mkT_B)^{3/2} \quad (98)$$

soit :

$$T_B = \frac{h^2}{2\pi mk} \left(\frac{N}{2,612 \text{ gV}} \right)^{2/3} = \frac{3,31 \text{ K}}{mk} \left(\frac{N}{\text{gV}} \right)^{2/3} \quad (99)$$

En divisant l'équation (97) par l'équation (98) on obtient :

$$N_{\epsilon > 0} = N \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (100)$$

Si $T < T_B$, le nombre de bosons dans le micro-état $\epsilon = 0$ est égal à :

$$N_{\epsilon=0} \approx N \left[1 - \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \right] \quad (101)$$

Si l'on fait décroître la température T au dessous de la valeur T_B , la population des bosons dans le micro-état $\epsilon = 0$ a tendance à augmenter. On appelle ce phénomène la condensation de Bose-Einstein. Il ne s'agit pas d'une condensation dans l'espace réel mais d'une condensation dans l'espace des impulsions : les bosons ont tendance à s'accumuler dans le micro-état de plus faible énergie.

Lorsque $T < T_B$ il est intéressant de calculer l'expression de quelques quantités thermodynamiques associées au gaz de Bose. Comme $\mu = 0$, $\eta = 0$. L'énergie interne vaut (équation 78) :

$$E = 2\pi \frac{gV}{h^3} (2m)^{3/2} (kT)^{5/2} J_{3/2}(0) \quad (102)$$

Comme $J_{3/2}(0) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} 1,34$ (appendice A6), on en déduit :

$$E = 1,34 \frac{3}{2} \frac{gV}{h^3} (2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2} \quad (103)$$

ou, en utilisant l'équation (99) :

$$E = 0,77 NkT \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (104)$$

ce qui permet de calculer la capacité calorifique à volume constant :

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = 1,93 Nk \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} = \frac{5}{2} \frac{E}{T} \quad (105)$$

L'entropie, qui est reliée au grand potentiel par $S = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} \right)_{V, \mu}$, se déduit aisément de l'équation (80) :

Le gaz parfait de I

Elle tend vers zéro
la thermodynamique

puisque $\mu = 0$. L
pression :

Ainsi, lorsque T
tème et non de :
trouvent dans l'
conséquent ne cr
néanmoins noter
nulle mais qu'el
trêmement faible.

L'examen
gie et la pressi
auraient si ce
par l'accumulati
manière imagée
bosons entre eux
sion" pour les f
tout comme le ga

Exercice 4 : On
 $m = 6,65 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Calculer T_B .

Exercice 5 : On
masse vaut $m =$
dans une boîte
1- Calculer T_B .
2- On considère
 $n_x = n_y = n_z =$

(99)

$$S = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} \right)_{V, \mu} = 1,28 Nk \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} = \frac{5}{3} \frac{E}{T} \quad (106)$$

(100)

Elle tend vers zéro lorsque $T \rightarrow 0$, en accord avec le troisième principe de la thermodynamique. On peut vérifier que :

$$F = E - TS = - \frac{2}{3} E = \Psi + \mu N = \Psi \quad (107)$$

(101)

puisque $\mu = 0$. L'expression ci-dessus permet également de calculer la pression :

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = 0,0851 \text{ g} \frac{m^{3/2} (kT)^{5/2}}{\hbar^3} \quad (108)$$

valeur T_B , la po-
augmenter. On ap-
s'agit pas d'une
dans l'espace des
le micro-état de

Ainsi, lorsque $T < T_B$, la pression ne dépend que de la température du système et non de son volume. Ceci provient de ce que les particules qui se trouvent dans l'état $\epsilon = 0$ ont une impulsion nulle (ou presque), et par conséquent ne créent pas de pression sur les parois du récipient. Il faut néanmoins noter que, pour un système fini, P ne peut être rigoureusement nulle mais qu'elle donne, à l'échelle macroscopique, une contribution extrêmement faible.

pression de quel-
bose. Comme $\mu = 0$,

(102)

L'examen des formules ci-dessus montre que lorsque $T < T_B$, l'énergie et la pression d'un gaz de Bose sont inférieures à la valeur qu'elles auraient si ce gaz avait un comportement classique. Cela peut s'expliquer par l'accumulation de ces particules dans l'état d'énergie le plus bas. De manière imagée cela revient à dire qu'il y a une certaine "attraction" des bosons entre eux (nous avons vu précédemment qu'il y a une certaine "répulsion" pour les fermions). Lorsque T est suffisamment élevée le gaz de Bose, tout comme le gaz de Fermi, se comporte comme un gaz classique.

(103)

(104)

Exercice 4 : On considère un gaz parfait de bosons de spin nul et de masse $m = 6,65 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ (Hélium). La concentration des bosons est de 10^{26} m^{-3} . Calculer T_B .

(105)

Exercice 5 : On considère une mole d'un gaz formé d'atomes d'hélium dont la masse vaut $m = 6,65 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ et dont le spin est nul. Ce gaz est enfermé dans une boîte cubique de volume $V = 0,0224 \text{ m}^3$.

$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} \right)_{V, \mu}$, se dé-

1- Calculer T_B .
2- On considère les niveaux d'énergie à une particule caractérisés par : $n_x = n_y = n_z = 1$ et $n_x = 2, n_y = n_z = 1$. Calculer l'énergie de ces états.