

Chapitre 2

Abscisse Curviligne

I Définition et Propriétés d'une Abscisse Curviligne

Dans ce chapitre nous allons considérer la longueur d'arc comme paramètre d'une courbe paramétrée (Γ, M) .

Définition 1.1: Soit (Γ, M) une courbe paramétrée de classe C^1 . Pour t_0 fixé appartenant à l'intervalle I (I est le domaine de définition de la représentation paramétrique M), on appelle *abscisse curviligne* de la courbe paramétrée (Γ, M) , la fonction suivante :

$$s = S(t) = \int_{t_0}^t \left\| \overrightarrow{M'(\tau)} \right\| d\tau.$$

La fonction $\tau \rightarrow \left\| \overrightarrow{M'(\tau)} \right\|$ est continue sur I , donc S est une primitive de cette fonction.

Si $t \geq t_0$, $S(t)$ est égale à la longueur de l'arc de Γ pris entre $M(t)$ et $M(t_0)$.

Si $t \leq t_0$, $S(t)$ est égale à moins la longueur de l'arc de Γ pris entre $M(t)$ et $M(t_0)$.

De sa définition, l'abscisse curviligne S est une fonction continue sur I . Son image $J = S(I) \subset \mathbb{R}$ est donc un intervalle de $\mathbb{R}$.

Le point $M(t_0) \in M(I) = \Gamma$, correspondant à $s = S(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} \left\| \overrightarrow{M'(\tau)} \right\| d\tau = 0$, est l'origine de l'abscisse curviligne S .

Proposition 1.1: Si l'ensemble des valeurs du paramètre t , pour lesquelles $M(t)$ est un point régulier de (Γ, M) , est dense dans $I = \text{Dom}M$, c-a-d tout intervalle $(\emptyset \neq)]\alpha, \beta[\subset I$ contient un t tel que $M(t)$ est régulier, la fonction S (c-a-d l'abscisse curviligne) est alors un homéomorphisme de I vers l'intervalle $J = S(I)$.

Par conséquent, avec les hypothèses de la proposition ci-dessus, on peut définir une reparamétrisation $\tilde{M} = M \circ S^{-1}$ de (Γ, M) , appelée reparamétrisation de (Γ, M) par une

abscisse curviligne ; autrement dit $(\Gamma, \tilde{M})$, $\tilde{M}: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, est une courbe paramétrée par une abscisse curviligne.

En général une reparamétrisation de (Γ, M) par une abscisse curviligne n'est pas de classe C^1 ; cependant, dans le cas particulier où tous les points $M(t)$, $t \in I$, sont des points réguliers, on a le théorème suivant :

Théorème 1.1: Soit (Γ, M) une courbe paramétrée de classe C^r et dont tous les points $M(t)$ sont réguliers. Une reparamétrisation $\tilde{M} = M \circ S^{-1}$ par une abscisse curviligne est alors de classe C^r et de plus on a :

$$\left\| \frac{d\tilde{M}}{ds}(s) \right\| = 1.$$

Démonstration :

1) Montrons que $\tilde{M}$ est de classe C^r .

- Si $r = 1$, c-a-d que M est de classe C^1 , donc la fonction $t \rightarrow \|\overrightarrow{M'(t)}\|$ est continue et donc l'abscisse curviligne $t \rightarrow S(t) = \int_{t_0}^t \|\overrightarrow{M'(\tau)}\| d\tau$ est une fonction dérivable et on a $t \rightarrow S'(t) = \|\overrightarrow{M'(t)}\|$ qui est continue ; ainsi S est de classe C^1 . De plus, comme par hypothèse tous les points $M(t)$ sont réguliers, alors $\forall t \in I$, $\|\overrightarrow{M'(t)}\| \neq 0$ et donc S est un C^1 -difféomorphisme (conséquence de la proposition 4.1 du chapitre précédent).

- Si $r \geq 2$, c-a-d que M est de classe C^r , donc l'application $t \rightarrow \overrightarrow{M'(t)}$ est de classe C^{r-1} et il en est de même de la fonction $t \rightarrow \overrightarrow{M'(t)} \cdot \overrightarrow{M'(t)}$ ainsi que de la fonction $t \rightarrow S'(t) = \|\overrightarrow{M'(t)}\| = \left(\overrightarrow{M'(t)} \cdot \overrightarrow{M'(t)} \right)^{1/2}$ (car $S'(t) \neq 0, \forall t \in I$). Ceci implique que S est de classe C^r et par la proposition 4.1 du chapitre précédent S est un C^r -difféomorphisme.

2) Montrons que $\left\| \frac{d\tilde{M}}{ds}(s) \right\| = 1$.

Comme la fonction $t \rightarrow \|\overrightarrow{M'(t)}\|$ est continue, alors la fonction $t \rightarrow S(t) = \int_{t_0}^t \|\overrightarrow{M'(\tau)}\| d\tau$ est dérivable et on a : $\forall t \in I$, $S'(t) = \|\overrightarrow{M'(t)}\| \neq 0$ (puisque par hypothèse tous les points $M(t)$ sont réguliers).

En dérivant l'application composée $M = \tilde{M} \circ S$ on obtient :

$$\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t) = \overrightarrow{\frac{d\tilde{M}}{ds}}(S(t)) \cdot \frac{dS}{dt}(t) = \overrightarrow{\frac{d\tilde{M}}{ds}}(S(t)) \cdot \|\overrightarrow{M'(t)}\|$$

d'où, en prenant les normes des deux membres :

$$\|\overrightarrow{M'(t)}\| = \left\| \overrightarrow{\frac{d\tilde{M}}{ds}}(S(t)) \right\| \cdot \|\overrightarrow{M'(t)}\|$$

et, comme $\|\overrightarrow{M'(t)}\| \neq 0$:

$$\left\| \overrightarrow{\frac{d\tilde{M}}{ds}}(S(t)) \right\| = 1, \quad \forall t \in I$$

ou encore :

$$\left\| \overrightarrow{\frac{d\tilde{M}}{ds}}(s) \right\| = 1, \quad \forall s \in J. \blacksquare$$

Dans la suite on posera :

$$\overrightarrow{T}(s) = \overrightarrow{\frac{d\tilde{M}}{ds}}(s).$$

Comme $\overrightarrow{\frac{d\tilde{M}}{ds}}(s) \neq \vec{0}$ puisque $\left\| \overrightarrow{\frac{d\tilde{M}}{ds}}(s) \right\| = 1$, $\overrightarrow{T}(s)$ est donc un vecteur unitaire tangent à $\Gamma (= \tilde{M}(J) = M(I))$ au point $\tilde{M}(s) (= M \circ S^{-1}(s))$.

II Etude Géométrique Locale d'une Courbe Paramétrée

II.1 Courbure

Dans tout ce paragraphe (Γ, M) est une courbe paramétrée de classe C^2 dont tous les points sont réguliers.

Soit $M(t_0)$ un point fixé de $\Gamma (= M(I))$, et soit la C^2 -reparamétrisation $\tilde{M} = M \circ S^{-1}$: $J \rightarrow \mathbb{R}^n$ où $S : t \in I \rightarrow S(t) = s \in J (= S(I))$ est une abscisse curviligne de la courbe (Γ, M) (la C^2 -reparamétrisation $\tilde{M}$ existe en vertu de la proposition 4.1 du chapitre précédent et du théorème 1.1), et posons $s_0 = S(t_0)$.

Définition 2.1: La courbure de $\Gamma (= \tilde{M}(J) = M(I))$ au point $\tilde{M}(s_0) (= M(t_0))$ est le nombre réel

$$\rho(s_0) = \left\| \overrightarrow{\frac{dT}{ds}}(s_0) \right\| (\geq 0).$$

Ce nombre existe car la dérivée $\frac{d\vec{T}}{ds}$ existe (puisque $\vec{T}(s) = \frac{d\vec{M}}{ds}(s)$ et $\vec{M}$ est de classe C^2).

Exemple 1 : Soit la droite paramétrée (Γ, M) de $\mathbb{R}^n$ définie par :

$\vec{OM}(t) = t \cdot \vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \neq \vec{0}$ ($\vec{u}$ vecteur directeur de la droite). L'équation de cette droite peut s'écrire aussi : $M(t) = t(u_1, \dots, u_n) = (u_1 \cdot t, \dots, u_n \cdot t)$. M est de classe C^∞ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $M'(t) = (u_1, \dots, u_n) \neq (0, \dots, 0)$, donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ est régulier. On peut donc reparamétriser la droite par une abscisse curviligne (proposition 1.1) et calculer la courbure en chaque point de Γ puisque (théorème 1.1) $\vec{M}$ est de même classe que M (il suffit que $\vec{M}$ soit de classe C^2).

Si on prend par exemple $t_0 = 0$, on a :

$$s = S(t) = \int_{t_0=0}^t \|\vec{M}'(\tau)\| d\tau = \int_0^t \|\vec{u}\| d\tau = \|\vec{u}\| \cdot t,$$

qui est une abscisse curviligne de (Γ, M) (pour chaque t_0 on peut définir une abscisse curviligne).

Soit $\vec{M} = M \circ S^{-1}$ la reparamétrisation associée à cette abscisse curviligne.

$s = S(t) = \|\vec{u}\| \cdot t \Leftrightarrow t = S^{-1}(s) = \frac{s}{\|\vec{u}\|}$, $s \in \mathbb{R}$. Ceci implique

$$\vec{M}(s) = M(S^{-1}(s)) = M\left(\frac{s}{\|\vec{u}\|}\right) = \frac{s}{\|\vec{u}\|} \cdot (u_1, \dots, u_n).$$

En dérivant $\vec{M}$ on obtient $\vec{T}(s)$ le vecteur unitaire tangent à Γ

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{M}}{ds}(s) = \frac{d\left(\frac{s}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}\right)}{ds} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

Donc

$\forall s \in \mathbb{R}$, $\frac{d\vec{T}}{ds}(s) = \vec{0}$ et par conséquent $\forall s \in \mathbb{R}$, $\rho(s) = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}(s)\right\| = 0$. C'est-à-dire que la courbure d'une droite est nulle en chacun de ses points (logique).

Exemple 2 : Soit le cercle paramétré (Γ, M) définie par :

$$M(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

M est de classe C^∞ et $M'(t)$ est égale à :

$$\vec{M}'(t) = (-R \sin t, R \cos t) \neq (0, 0), \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Ceci implique que $M(t)$ est régulier, $\forall t \in [0, 2\pi]$.

On peut donc reparamétriser le cercle par une abscisse curviligne $s = S(t)$ (proposition 1.1) et $\tilde{M} = M \circ S^{-1}$ est de classe C^∞ (théorème 1.1).

Soit l'abscisse curviligne de (Γ, M)

$$s = S(t) = \int_0^t \|\overrightarrow{M'(\tau)}\| d\tau = \int_0^t R d\tau = Rt.$$

$s = S(t) = Rt \Leftrightarrow t = S^{-1}(s) = \frac{s}{R}$, où $s = Rt \in [0, 2\pi R]$. Ceci implique

$$\tilde{M}(s) = M(S^{-1}(s)) = M\left(\frac{s}{R}\right) = \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R}\right).$$

Donc

$$\overrightarrow{T(s)} = \frac{d\tilde{M}}{ds}(s) = \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}\right)$$

et donc

$$\rho(s) = \left\| \frac{d\tilde{M}}{ds}(s) \right\| = \left\| \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R}\right) \right\| = \frac{1}{R}, \quad \forall s \in [0, 2\pi R].$$

La courbure d'un cercle est donc constante (logique) et égale à l'inverse de son rayon.

Montrons que, plus la courbure au point $M(t_0)$ est grande, plus rapidement $M(t)$ s'éloigne de sa tangente en $M(t_0)$.

Soit Q la représentation paramétrique de la tangente à $\Gamma (= M(I) = \tilde{M}(J))$ en $M(t_0) = \tilde{M}(s_0)$ définie par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ}(s) &= \overrightarrow{OM}(s_0) + (s - s_0) \frac{d\tilde{M}}{ds}(s_0) = \overrightarrow{OM}(s_0) + (s - s_0) \overrightarrow{T}(s_0) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{\tilde{M}(s_0)Q(s)} = (s - s_0) \overrightarrow{T}(s_0) \quad (1). \end{aligned}$$

Posons

$$F(s) = \delta(Q(s), \tilde{M}(s)) = \left\| \overrightarrow{Q(s)\tilde{M}(s)} \right\| \quad (2).$$

$F(s)$ est la distance entre un point $\tilde{M}(s)$ de la courbe et un point $Q(s)$ de sa tangente au point $\tilde{M}(s_0)$ et ceci au voisinage de $s = s_0$.

Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre 2 en $s = s_0$ pour l'application $\tilde{M}$:

$$\overrightarrow{\tilde{M}(s_0)\tilde{M}(s)} = \overrightarrow{OM}(s) - \overrightarrow{OM}(s_0) = (s - s_0) \overrightarrow{T}(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2} \left(\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s_0) + \varepsilon(s) \right) \quad (3),$$

où $\lim_{s \rightarrow s_0} \overrightarrow{\varepsilon}(s) = \vec{0}$.

D'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Q(s)\tilde{M}(s)} &= \overrightarrow{\tilde{M}(s_0)\tilde{M}(s)} - \overrightarrow{\tilde{M}(s_0)Q(s)} \stackrel{(1)}{=} \overrightarrow{\tilde{M}(s_0)\tilde{M}(s)} - (s-s_0)\overrightarrow{T(s_0)} \stackrel{(3)}{=} \\ &\quad \frac{(s-s_0)^2}{2} \left(\overrightarrow{\frac{dT}{ds}}(s_0) + \overrightarrow{\varepsilon(s)} \right).\end{aligned}$$

Si $\rho(s_0) \neq 0$, on a donc

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{F(s)}{\frac{(s-s_0)^2}{2} \rho(s_0)} \stackrel{(2)}{=} \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\left\| \overrightarrow{Q(s)\tilde{M}(s)} \right\|}{\frac{(s-s_0)^2}{2} \rho(s_0)} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\frac{(s-s_0)^2}{2} \left\| \overrightarrow{\frac{dT}{ds}}(s_0) + \overrightarrow{\varepsilon(s)} \right\|}{\frac{(s-s_0)^2}{2} \rho(s_0)} = 1.$$

On en déduit que $F(s) \sim \frac{(s-s_0)^2}{2} \rho(s_0)$ quand $s \rightarrow s_0$. Par conséquent, au voisinage de s_0 , plus $\rho(s_0)$ est grande, plus l'écart entre les points $\tilde{M}(s)$ et $Q(s)$ est grand.

Définition 2.2: Soit (Γ, M) une courbe paramétrée de classe C^r , $r \geq 2$. Un point régulier $M(t_0)$ de Γ est dit *birégulier* si $\overrightarrow{M'(t_0)}$ et $\overrightarrow{M''(t_0)}$ sont linéairement indépendants. On dit que (Γ, M) est *birégulière*, si tous les points de Γ sont biréguliers.

Proposition 2.1: Un point $M(t_0) \in \Gamma = M(I)$ est birégulier si et seulement si la courbure de Γ en $M(t_0)$ est non nulle.

Démonstration: Dérivons deux fois l'application $M = \tilde{M} \circ S$, où $\tilde{M}$ est la reparamétrisation de Γ par une abscisse curviligne S .

$$\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t_0) = \overrightarrow{\frac{d\tilde{M}}{ds}}(S(t_0)) \cdot \frac{dS}{dt}(t_0) = \overrightarrow{T(S(t_0))} \cdot \frac{dS}{dt}(t_0), \quad (1)$$

$\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t_0)$ et $\overrightarrow{\frac{d\tilde{M}}{ds}}(s_0) = \overrightarrow{T(s_0)}$ ($s_0 = S(t_0)$) sont donc colinéaires .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\frac{d^2M}{dt^2}}(t_0) &= \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\frac{d\tilde{M}}{ds}}(S(.)) \cdot \frac{dS}{dt}(.) \right) (t_0) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\frac{d\tilde{M}}{ds}}(S(.)) \right) (t_0) \cdot \frac{dS}{dt}(t_0) + \overrightarrow{\frac{d\tilde{M}}{ds}}(S(t_0)) \cdot \frac{d^2S}{dt^2}(t_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\overrightarrow{d^2\tilde{M}}}{ds^2}(S(t_0)) \cdot \left(\frac{dS}{dt}(t_0)\right)^2 + \overrightarrow{T}(s_0) \cdot \frac{d^2S}{dt^2}(t_0) \\
&= \frac{\overrightarrow{dT}}{ds}(s_0) \cdot \left(\frac{dS}{dt}(t_0)\right)^2 + \overrightarrow{T}(s_0) \cdot \frac{d^2S}{dt^2}(t_0) \quad (2)
\end{aligned}$$

i) Condition nécessaire :

Si $M(t_0)$ est birégulier, il résulte de (2) que $\frac{\overrightarrow{dT}}{ds}(s_0) \cdot \left(\frac{dS}{dt}(t_0)\right)^2 \neq \vec{0}$ sinon $\overrightarrow{M''}(t_0)$ serait colinéaire à $\overrightarrow{M'}(t_0)$ puisque de (1) ce dernier vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{T}(s_0)$. Par conséquent $\frac{\overrightarrow{dT}}{ds}(s_0) \neq \vec{0}$ et donc $\rho(s_0) = \left\| \frac{\overrightarrow{dT}}{ds}(s_0) \right\| \neq 0$.

ii) Condition suffisante :

Si $\rho(s_0) \neq 0$, la combinaison linéaire

$$\alpha \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0) + \beta \frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}(t_0) = \vec{0}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

s'écrit, en utilisant (1) et (2), comme suit :

$$\left(\alpha \frac{dS}{dt}(t_0) + \beta \frac{d^2S}{dt^2}(t_0) \right) \overrightarrow{T}(s_0) + \beta \left(\frac{dS}{dt}(t_0) \right)^2 \frac{\overrightarrow{dT}}{ds}(s_0) = \vec{0}. \quad (3)$$

Comme $\|\overrightarrow{T}(s)\| = \|\overrightarrow{\tilde{M}'(s)}\| = 1$, alors $\overrightarrow{T}(s) \cdot \overrightarrow{T}(s) = \|\overrightarrow{\tilde{M}'(s)}\|^2 = 1$. Ceci implique que

$$\frac{d(\overrightarrow{T}(s) \cdot \overrightarrow{T}(s))}{ds} = 2\overrightarrow{T}(s) \cdot \frac{\overrightarrow{dT}}{ds}(s) = 0 \implies \overrightarrow{T}(s) \cdot \frac{\overrightarrow{dT}}{ds}(s) = 0.$$

On en déduit qu'en faisant le produit scalaire de (3) par $\frac{\overrightarrow{dT}}{ds}(s_0)$, on obtient :

$$\beta \left(\frac{dS}{dt}(t_0) \right)^2 \frac{\overrightarrow{dT}}{ds}(s_0) \cdot \frac{\overrightarrow{dT}}{ds}(s_0) = \beta \left(\frac{dS}{dt}(t_0) \right)^2 \rho(s_0)^2 = \beta \|\overrightarrow{M'}(t_0)\|^2 \rho(s_0)^2 = 0.$$

Comme par hypothèse, dans ce paragraphe, tous les points $M(t)$ sont réguliers, donc $\|\overrightarrow{M'}(t_0)\| \neq 0$, et comme condition suffisante $\rho(s_0) \neq 0$, alors $\beta = 0$ et en remplaçant dans (3), on aura aussi $\alpha = 0$. Par conséquent $\overrightarrow{M'}(t_0)$ et $\overrightarrow{M''}(t_0)$ sont linéairement indépendants, donc $M(t_0)$ est un point birégulier de (Γ, M) . ■

Remarque : Etant donnée une courbe paramétrée (Γ, M) de classe C^2 et birégulière. Il est souvent difficile d'exprimer, au moyen de fonctions élémentaires connues, une

reparamétrisation de Γ par une abscisse curviligne. Il est donc utile de connaître l'expression de la courbure de Γ en un point $M(t_0)$ en fonction de la représentation paramétrique M .

- Si $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$

$$\rho(t_0) = \frac{1}{\|\overrightarrow{M'(t_0)}\|^3} \left[\|\overrightarrow{M''(t_0)}\|^2 \|\overrightarrow{M'(t_0)}\|^2 - (\overrightarrow{M''(t_0)} \cdot \overrightarrow{M'(t_0)})^2 \right]^{1/2}.$$

- Si Γ est une courbe plane et $\overrightarrow{M'(t_0)}$ et $\overrightarrow{M''(t_0)}$ sont exprimés par rapport à une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, alors on a :

$$\rho(t_0) = \frac{|\det(\overrightarrow{M'(t_0)}, \overrightarrow{M''(t_0)})|}{\|\overrightarrow{M'(t_0)}\|^3}.$$

- Si Γ est une courbe dans l'espace, on a :

$$\rho(t_0) = \frac{\|\overrightarrow{M'(t_0)} \wedge \overrightarrow{M''(t_0)}\|}{\|\overrightarrow{M'(t_0)}\|^3}.$$

Rappel : Soient $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ s'écrivant dans la base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ comme suit :

$$\overrightarrow{u_1} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_2} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

$\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ égal à :

$$\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Définition 2.3 : Soit (Γ, M) une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^2 et régulière, et soit $M(t_0)$ un point birégulier. Soit $\tilde{M} = M \circ S^{-1}: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ une reparamétrisation par une abscisse curviligne $t \in I \rightarrow s = S(t) \in J = S(I)$, $s_0 = S(t_0)$.

1) On appelle *rayon de courbure* de Γ en $M(t_0) = \tilde{M}(s_0)$ le nombre

$$R(s_0) = \frac{1}{\rho(s_0)} (> 0).$$

2) On appelle *vecteur normal principal* à Γ en $M(t_0) = \tilde{M}(s_0)$ le vecteur

$$\overrightarrow{N(s_0)} = \frac{1}{\rho(s_0)} \frac{d\vec{T}}{ds}(s_0) = R(s_0) \frac{d\vec{T}}{ds}(s_0).$$

3) On appelle *centre de courbure* de Γ en $M(t_0) = \tilde{M}(s_0)$, le point $C(s_0)$ tel que

$$\overrightarrow{OC}(s_0) - \overrightarrow{OM}(s_0) = \overrightarrow{\tilde{M}(s_0)C(s_0)} = R(s_0)\overrightarrow{N}(s_0).$$

Le centre de courbure de Γ en $M(t_0)$ est le centre du cercle tangent à Γ en $M(t_0)$ et de rayon égal au rayon de courbure de Γ en $M(t_0)$.

De la définition du vecteur normal principal $\overrightarrow{N}(s_0)$ on en déduit que

$$\|\overrightarrow{N}(s_0)\| = \frac{1}{\rho(s_0)} \left\| \frac{d\vec{T}}{ds}(s_0) \right\| = \frac{1}{\rho(s_0)} \cdot \rho(s_0) = 1,$$

c-a-d $\overrightarrow{N}(s_0)$ est un vecteur unitaire. De plus comme $\overrightarrow{T}(s) \cdot \overrightarrow{T}(s) = \|\overrightarrow{T}(s)\|^2 = 1^2 = 1$, alors

$$\frac{d(\overrightarrow{T}(s) \cdot \overrightarrow{T}(s))}{ds} = 2\overrightarrow{T}(s) \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}(s) = 0.$$

Ceci implique que $\frac{d\vec{T}}{ds}(s)$ est orthogonal à $\overrightarrow{T}(s)$ et donc $\overrightarrow{N}(s)$, qui est colinéaire à $\frac{d\vec{T}}{ds}(s)$, est orthogonal à $\overrightarrow{T}(s)$. Par conséquent $\{\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s)\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

II.2 Courbes Planes

Soit (Γ, M) une courbe paramétrée plane de classe C^3 , le paramètre étant une abscisse curviligne s ($s \in I \rightarrow M(s) \in \Gamma$). Supposons que tous les points de Γ soient biréguliers. Le rayon de courbure $R(s) = \frac{1}{\rho(s)}$ de Γ en un point quelconque $M(s)$ est alors défini (puisque par hypothèse Γ est birégulier et donc de la proposition 2.1 $\forall s \in I, \rho(s) \neq 0$) et il en est de même du centre de courbure $C(s)$ de Γ en $M(s)$ ($\overrightarrow{M(s)C(s)} = R(s)\overrightarrow{N}(s)$).

Comme par hypothèse (Γ, M) est de classe C^3 , donc $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est de classe C^1 puisque par définition $\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds}$. Le rayon de courbure $R(s)$ possède donc une dérivée continue s'exprimant par :

$$\frac{dR}{ds}(s) = -\frac{\frac{d\vec{T}}{ds}(s) \cdot \frac{d^2\vec{T}}{ds^2}(s)}{\rho^3(s)}.$$

En effet, on a :

$$\frac{dR}{ds}(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\rho(s)} \right) (s) = -\frac{\rho'(s)}{\rho^2(s)}. \quad (1)$$

De plus, comme

$$\rho^2(s) = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds}(s) \right\|^2 = \frac{d\vec{T}}{ds}(s) \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}(s), \quad (2)$$

Alors

$$\begin{aligned} (\rho^2(s))'_s &= \left(\frac{d\vec{T}}{ds}(s) \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}(s) \right)'_s \Leftrightarrow 2\rho(s)\rho'(s) \stackrel{(2)}{=} 2 \frac{d\vec{T}}{ds}(s) \cdot \frac{d^2\vec{T}}{ds^2}(s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho'(s) = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}(s) \cdot \frac{d^2\vec{T}}{ds^2}(s)}{\rho(s)}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{dR}{ds}(s) \stackrel{(1)}{=} - \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}(s) \cdot \frac{d^2\vec{T}}{ds^2}(s)}{\rho^3(s)}$$

et comme M est de classe C^3 , alors $\frac{dR}{ds}$ est continue.

Comme $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est de classe C^1 et on vient de montrer que la fonction $s \rightarrow R(s)$ est aussi de classe C^1 , alors le vecteur normal principal $\vec{N} = R \frac{d\vec{T}}{ds}$ est de classe C^1 et ainsi, il en est de même de l'application $s \in I \rightarrow C(s) \in \mathbb{R}^2$ qui donne les centres de courbure de Γ ($\overrightarrow{OC}(s) = \overrightarrow{OM}(s) + R(s)\vec{N}(s)$). Cette application définit une courbe paramétrée et son image $\Gamma_D = C(I)$ est appelée *la développée de la courbe Γ* .

Exprimons $\frac{d\vec{N}}{ds}(s)$ et $\frac{d\overrightarrow{OC}}{ds}(s)$ dans la base orthonormée $\{\overrightarrow{T}(s), \vec{N}(s)\}$, mais montrons d'abord le résultat suivant :

Proposition 2.2: Soient u_1 et u_2 des applications de $I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in I$, $\{\overrightarrow{u_1(t)}, \overrightarrow{u_2(t)}\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Supposons que u_1 et u_2 soient dérivables sur I . Alors la matrice des coordonnées de $\overrightarrow{u'_1(t)}$ et $\overrightarrow{u'_2(t)}$, par rapport à $\{\overrightarrow{u_1(t)}, \overrightarrow{u_2(t)}\}$, est antisymétrique (c-a-d $\forall i, j \ a_{ij} = a_{ji}$).

Démonstration : Pour $i = 1, 2$, $\|\overrightarrow{u_i(t)}\| = 1 \Rightarrow \|\overrightarrow{u_i(t)}\|^2 = 1$ et on a :

$$0 = \frac{d(1)}{dt} = \frac{d}{dt}(\|\overrightarrow{u_i(t)}\|^2) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{u_i(t)} \cdot \overrightarrow{u_i(t)}) = 2\overrightarrow{u_i(t)} \cdot \frac{d\overrightarrow{u_i(t)}}{dt} \quad (*)$$

D'autre part, comme $\overrightarrow{u_1(t)}$ et $\overrightarrow{u_2(t)}$ sont orthogonaux ($\overrightarrow{u_1(t)} \cdot \overrightarrow{u_2(t)} = 0$), alors

$$0 = \frac{d(0)}{dt} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{u_1(t)} \cdot \overrightarrow{u_2(t)}) = \frac{d\overrightarrow{u_1(t)}}{dt} \cdot \overrightarrow{u_2(t)} + \overrightarrow{u_1(t)} \cdot \frac{d\overrightarrow{u_2(t)}}{dt} \quad (**)$$

Ecrivons $\overrightarrow{u'_1(t)}$ et $\overrightarrow{u'_2(t)}$ dans la base $\{\overrightarrow{u_1(t)}, \overrightarrow{u_2(t)}\}$:

$$\overrightarrow{u'_1(t)} = \alpha \overrightarrow{u_1(t)} + \beta \overrightarrow{u_2(t)} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u'_2(t)} = \gamma \overrightarrow{u_1(t)} + \delta \overrightarrow{u_2(t)},$$

ceci implique que

$$\overrightarrow{u'_1(t)} \cdot \overrightarrow{u_1(t)} \stackrel{(*)}{=} (\alpha \overrightarrow{u_1(t)} + \beta \overrightarrow{u_2(t)}) \cdot \overrightarrow{u_1(t)} = \alpha = 0,$$

$$\overrightarrow{u'_2(t)} \cdot \overrightarrow{u_2(t)} \stackrel{(*)}{=} (\gamma \overrightarrow{u_1(t)} + \delta \overrightarrow{u_2(t)}) \cdot \overrightarrow{u_2(t)} = \delta = 0$$

et

$$\begin{aligned} \beta &= (\alpha \overrightarrow{u_1(t)} + \beta \overrightarrow{u_2(t)}) \cdot \overrightarrow{u_2(t)} = \overrightarrow{u'_1(t)} \cdot \overrightarrow{u_2(t)} \stackrel{(**)}{=} -\overrightarrow{u_1(t)} \cdot \overrightarrow{u'_2(t)} \\ &= -\overrightarrow{u_1(t)} \cdot (\gamma \overrightarrow{u_1(t)} + \delta \overrightarrow{u_2(t)}) = -\gamma. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Cette proposition implique que la matrice des coordonnées de $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s)$ et $\frac{d\overrightarrow{N}}{ds}(s)$ par rapport à la base $\{\overrightarrow{T(s)}, \overrightarrow{N(s)}\}$ est antisymétrique, c-a-d

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Par définition du vecteur normal principal, on a :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s) = \rho(s) \overrightarrow{N(s)} = 0 \cdot \overrightarrow{T(s)} + \rho(s) \overrightarrow{N(s)} = a_{11}(s) \overrightarrow{T(s)} + a_{12}(s) \overrightarrow{N(s)}. \quad (**)$$

De (*) et (**) on a donc

$$\frac{d\overrightarrow{N}}{ds}(s) = a_{21}(s) \overrightarrow{T(s)} + a_{22}(s) \overrightarrow{N(s)} = -\rho(s) \overrightarrow{T(s)} + 0 \cdot \overrightarrow{N(s)} = -\rho(s) \overrightarrow{T(s)}.$$

Calculons $\frac{d\overrightarrow{OC}}{ds}(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{OC}}{ds}(s) &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}(s) + \frac{dR}{ds}(s) \overrightarrow{N(s)} + R(s) \frac{d\overrightarrow{N}}{ds}(s) = \overrightarrow{T(s)} + \frac{dR}{ds}(s) \overrightarrow{N(s)} - R(s) \rho(s) \overrightarrow{T(s)} \\ &= \overrightarrow{T(s)} + \frac{dR}{ds}(s) \overrightarrow{N(s)} - 1 \cdot \overrightarrow{T(s)} = \frac{dR}{ds}(s) \overrightarrow{N(s)}. \end{aligned}$$

On en déduit de cette dernière formule que, si le point $C(s)$ de $\Gamma_D = C(I)$ (la développée de Γ) est régulier (c-a-d $\frac{dOC}{ds}(s) \neq \vec{0}$), la tangente à Γ_D au point $C(s)$ coïncide avec la normale à $\Gamma = M(I)$ au point $M(s)$.

II.3 Courbes de l'espace – Repère de Frénet

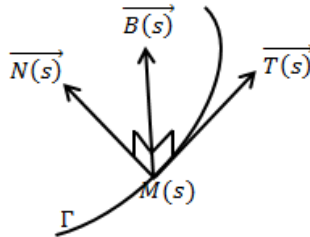
Soit (Γ, M) , $M: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, une courbe paramétrée de l'espace (appelée aussi courbe gauche), de classe C^3 , dont tous les points sont biréguliers. Le paramètre étant une abscisse curviligne s .

Définition 2.4:

1) Le vecteur $\overrightarrow{B(s)} = \overrightarrow{T(s)} \wedge \overrightarrow{N(s)}$ est appelé vecteur binormal à Γ au point $M(s)$.

$$\|\overrightarrow{B(s)}\| = \|\overrightarrow{T(s)} \wedge \overrightarrow{N(s)}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{T(s)}\|^2 \|\overrightarrow{N(s)}\|^2 - (\overrightarrow{T(s)} \cdot \overrightarrow{N(s)})^2} = \sqrt{1^2 \cdot 1^2 - 0^2} = 1.$$

2) Le repère orthonormé $(M(s), \{\overrightarrow{T(s)}, \overrightarrow{N(s)}, \overrightarrow{B(s)}\})$ s'appelle repère de Frénet de Γ au point $M(s)$.



3) - Le plan défini par $(M(s), \{\overrightarrow{T(s)}, \overrightarrow{N(s)}\})$ s'appelle plan osculateur à Γ au point $M(s)$ (c'est le plan qui contient le mieux Γ).

- Le plan défini par $(M(s), \{\overrightarrow{N(s)}, \overrightarrow{B(s)}\})$ s'appelle plan normal à Γ au point $M(s)$.

- Le plan défini par $(M(s), \{\overrightarrow{T(s)}, \overrightarrow{B(s)}\})$ s'appelle plan rectifiant à Γ au point $M(s)$.

Comme (Γ, M) est de classe C^3 , donc $\overrightarrow{N(s)} = \frac{1}{\rho(s)} \frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s)$ est dérivable. Par conséquent $\overrightarrow{B(s)} = \overrightarrow{T(s)} \wedge \overrightarrow{N(s)}$ est aussi dérivable.

Définition 2.5: Le réel $\tau(s) = \overrightarrow{B(s)} \cdot \frac{d\overrightarrow{N}}{ds}(s)$ est appelé *torsion* de la courbe Γ au point $M(s)$.

Théorème 2.1: Les dérivées des vecteurs du repère de Frénet de Γ en un point $M(s)$ s'expriment, par rapport à ce même repère, par :

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s) &= \rho(s)\overrightarrow{N(s)} \\ \frac{d\overrightarrow{N}}{ds}(s) &= -\rho(s)\overrightarrow{T(s)} + \tau(s)\overrightarrow{B(s)} \\ \frac{d\overrightarrow{B}}{ds}(s) &= -\tau(s)\overrightarrow{N(s)} \end{cases}$$

Ces formules sont dites *formules de Frénet*.

Démonstration : Par définition du vecteur normal principal, on a :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s) = \rho(s)\overrightarrow{N(s)},$$

c'est-à-dire la première formule de Frénet.

On sait que la matrice des coordonnées de $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s)$, $\frac{d\overrightarrow{N}}{ds}(s)$ et $\frac{d\overrightarrow{B}}{ds}(s)$ dans la base $\{\overrightarrow{T(s)}, \overrightarrow{N(s)}, \overrightarrow{B(s)}\}$ est antisymétrique, donc on a :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s) \\ \frac{d\overrightarrow{N}}{ds}(s) \\ \frac{d\overrightarrow{B}}{ds}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho(s) & 0 \\ -\rho(s) & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{T(s)} \\ \overrightarrow{N(s)} \\ \overrightarrow{B(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(s)\overrightarrow{N(s)} \\ -\rho(s)\overrightarrow{T(s)} + \alpha\overrightarrow{B(s)} \\ -\alpha\overrightarrow{N(s)} \end{pmatrix} \quad (*)$$

Il reste à déterminer α pour trouver les deux dernières formules de Frénet.

Le vecteur $\overrightarrow{B(s)} = \overrightarrow{T(s)} \wedge \overrightarrow{N(s)}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{T(s)}$ et $\overrightarrow{N(s)}$, donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B(s)} \cdot \overrightarrow{N(s)} &= 0 \implies 0 = \frac{d(0)}{ds} = \frac{d}{ds}(\overrightarrow{B(s)} \cdot \overrightarrow{N(s)}) = \frac{d\overrightarrow{B}}{ds}(s) \cdot \overrightarrow{N(s)} + \overrightarrow{B(s)} \cdot \frac{d\overrightarrow{N}}{ds}(s) \\ &= \frac{d\overrightarrow{B}}{ds}(s) \cdot \overrightarrow{N(s)} + \tau(s) \\ \implies \frac{d\overrightarrow{B}}{ds}(s) \cdot \overrightarrow{N(s)} &= -\tau(s). \quad (**) \end{aligned}$$

De (*) et (**) on a :

$$-\tau(s) \stackrel{(**)}{=} \frac{d\vec{B}}{ds}(s) \cdot \vec{N}(s) \stackrel{(*)}{=} -\alpha \vec{N}(s) \cdot \vec{N}(s) = -\alpha \|\vec{N}(s)\|^2 = -\alpha \cdot 1 \Rightarrow \alpha = \tau(s). \blacksquare$$

Projection de (Γ, M) sur les plans osculateur, normal et rectifiant :

Soit (Γ, M) une courbe dans l'espace, paramétrée par une abscisse curviligne s , de classe C^3 , birégulière et dont la torsion $\tau(s_0)$ en un point $M(s_0)$ est non nulle. La formule de Taylor à l'ordre 3 en s_0 de l'application M s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{OM}(s) = \vec{OM}(s_0) + (s - s_0) \frac{d\vec{OM}}{ds}(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!} \frac{d^2\vec{OM}}{ds^2}(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{3!} \frac{d^3\vec{OM}}{ds^3}(s_0) \\ + \frac{(s - s_0)^3}{3!} \vec{u}(s), \end{aligned} \quad (1)$$

avec $\lim_{s \rightarrow s_0} \vec{u}(s) = \vec{0}$.

Comme $\frac{d\vec{OM}}{ds}(s_0) = \vec{T}(s_0)$ et $\frac{d^2\vec{OM}}{ds^2}(s_0) = \frac{d\vec{T}}{ds}(s_0) = \rho(s_0)\vec{N}(s_0)$, et en utilisant les formules de Frénet, la formule de Taylor ci-dessus, par rapport au repère de Frénet $(M(s_0), \{\vec{T}(s_0), \vec{N}(s_0), \vec{B}(s_0)\})$, s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{OM}(s) - \vec{OM}(s_0) &= \vec{M}(s_0)\vec{M}(s) \\ &= (s - s_0)(1 + \alpha(s))\vec{T}(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}(\rho(s_0) + \beta(s))\vec{N}(s_0) \\ &\quad + \frac{(s - s_0)^3}{3!}(\rho(s_0)\tau(s_0) + h(s))\vec{B}(s_0), \end{aligned}$$

où

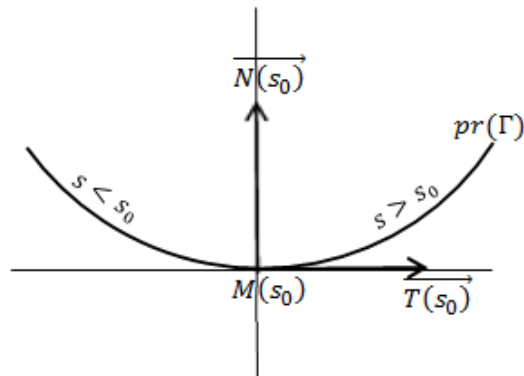
$$\begin{aligned} \vec{u}(s) &= f(s)\vec{T}(s_0) + g(s)\vec{N}(s_0) + h(s)\vec{B}(s_0), \\ \alpha(s) &= \frac{(s - s_0)^2}{3!}(-\rho^2(s_0) + f(s)), \\ \beta(s) &= \frac{(s - s_0)}{3} \left(\frac{d\rho}{ds}(s_0) + g(s) \right) \end{aligned}$$

et

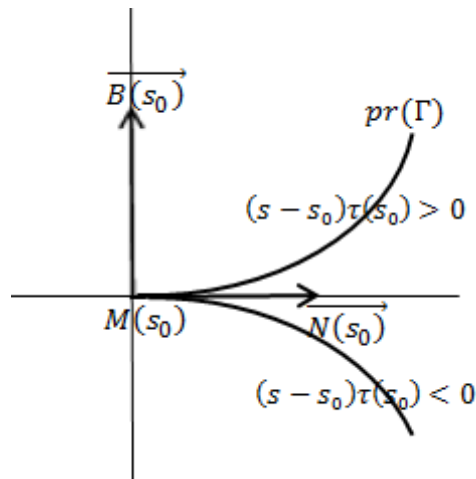
$$\lim_{s \rightarrow s_0} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow s_0} \beta(s) = \lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = \lim_{s \rightarrow s_0} g(s) = \lim_{s \rightarrow s_0} h(s) = 0.$$

On en déduit la forme, au voisinage de $M(s_0)$, des projections orthogonales de la courbe Γ sur ses plans osculateur, normal et rectifiant au point $M(s_0)$.

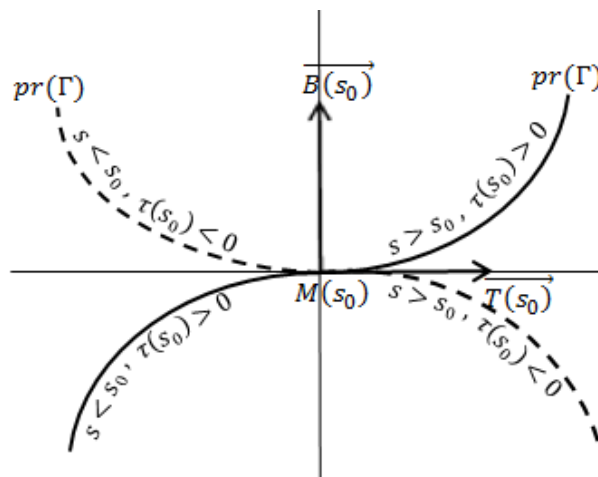
1 - Projection orthogonale de Γ sur son plan osculateur au point $M(s_0)$



2 - Projection orthogonale de Γ sur son plan normal au point $M(s_0)$



3 - Projection orthogonale de Γ sur son plan rectifiant au point $M(s_0)$



Expression de la torsion par rapport à un paramètre t quelconque

Soit (Γ, M) une courbe paramétrée dans l'espace, de classe C^3 et dont tous les points $M(t)$ sont biréguliers. La torsion $\tau(t)$ de Γ en un point $M(t)$ est égale à :

$$\tau(t) = \frac{(\overrightarrow{M'(t)}, \overrightarrow{M''(t)}, \overrightarrow{M'''(t)})}{\|\overrightarrow{M'(t)} \wedge \overrightarrow{M''(t)}\|^2},$$

où

$$(\overrightarrow{M'(t)}, \overrightarrow{M''(t)}, \overrightarrow{M'''(t)}) = \overrightarrow{M'(t)} \cdot (\overrightarrow{M'(t)} \wedge \overrightarrow{M''(t)})$$

est le produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{M'(t)}$, $\overrightarrow{M''(t)}$ et $\overrightarrow{M'''(t)}$.

Le produit mixte est une forme multilinéaire alternée ; ceci implique que

$$(\overrightarrow{M'(t)}, \overrightarrow{M''(t)}, \overrightarrow{M'''(t)}) = -(\overrightarrow{M''(t)}, \overrightarrow{M'(t)}, \overrightarrow{M'''(t)}).$$

Dans la base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ou dans une base orthonormée directe, le produit mixte est égale à :

$$(\overrightarrow{M'(t)}, \overrightarrow{M''(t)}, \overrightarrow{M'''(t)}) = \det(\overrightarrow{M'(t)}, \overrightarrow{M''(t)}, \overrightarrow{M'''(t)}).$$

Théorème 2.2: Soit (Γ, M) une courbe paramétrée dans l'espace, de classe C^3 et dont tous les points $M(t)$ sont biréguliers. La courbe Γ est plane si et seulement si sa torsion est identiquement nulle (c-a-d $\forall t \in \text{dom}M, \tau(t) = 0$).