

T.D Chapitre 1

(Courbes Paramétrées)

Exercice 4: Etudier la courbe paramétrée (Γ, M) définie par :

$$M(t) = (x(t), y(t)) = \left(t^2 + \frac{2}{t}, t^2 + \frac{1}{t^2}\right)$$

Solution :

1) Domaine de définition de l'application M est $\mathbb{R}^*$.

2) Pas de symétrie par rapport aux axes Ox , Oy et à l'origine O , puisque

$$x(-t) \neq x(t) \text{ et } x(-t) \neq -x(t).$$

3) Branches infinies :

3.1) Branches infinies quand $t \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(t^2 + \frac{2}{t}\right) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) = +\infty.$$

Donc la courbe Γ a deux branches infinies, quand $t \rightarrow -\infty$ et quand $t \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{t^2 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{2}{t}} = 1.$$

Ceci implique

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (y(t) - 1 \cdot x(t)) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(t^2 + \frac{1}{t^2} - t^2 - \frac{2}{t}\right) = 0.$$

Par conséquent, la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe pour ces deux branches infinies quand $t \rightarrow \pm\infty$.

3.2) Branches infinies quand $t \rightarrow 0^\pm$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \left(t^2 + \frac{2}{t}\right) = \pm\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0^\pm} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) = +\infty.$$

Donc la courbe Γ a deux branches infinies, quand $t \rightarrow 0^-$ et quand $t \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{t^2 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{2}{t}} = \pm\infty.$$

On a donc deux branches paraboliques de direction asymptotique l'axe Oy, quand $t \rightarrow 0^-$ et quand $t \rightarrow 0^+$.

4) Tableau de variation des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de la représentation paramétrique M :

$$\begin{cases} x'(t) = 2t - \frac{2}{t^2} = \frac{2(t-1)(t^2+t+1)}{t^2} \\ y'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} = \frac{2(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^3} \end{cases}$$

$x'(t)$ a le signe de $t-1$ et $y'(t)$ a le signe de $t(t^2-1)$.

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$x'(t)$	$-$			$-$	0	$+$
$x(t)$	$+\infty$	-1			3	$+\infty$
$y'(t)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$y(t)$	$+\infty$	2			2	$+\infty$

5) Points singuliers :

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(t-1)(t^2+t+1)}{t^2} = 0 \\ \frac{2(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^3} = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 1,$$

c-a-d $M'(1) = (x'(1), y'(1)) = (0,0)$, donc $M(1) = (3,2)$ est un point singulier.

Calculons les dérivées successives de l'application M , en $t = 1$, pour déterminer un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(1)$ et la nature de ce point singulier.

$$\begin{cases} x''(t) = 2 + \frac{4}{t^3} \\ y''(t) = 2 + \frac{6}{t^4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''(1) = 6 \\ y''(1) = 8 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M''(1)} = (6, 8) \neq (0, 0).$$

La courbe Γ admet donc une tangente T en $M(1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{M''(1)} = (6, 8)$.

Ainsi l'équation de T est donnée par :

$$y - 2 = \frac{8}{6}(x - 3) \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - 2.$$

Nature du point singulier $M(1) = (3, 2)$:

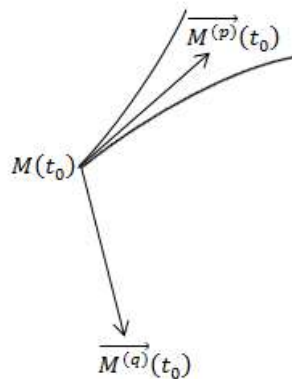
Dans le repère $(M(t_0); \{\overrightarrow{M^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{M^{(q)}}(t_0)\})$ (voir le cours) les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ d'un point $M(t)$ sont équivalentes, au voisinage proche de t_0 , à :

$$x(t) \underset{t \rightarrow t_0}{\sim} \frac{(t - t_0)^p}{p!} \quad \text{et} \quad y(t) \underset{t \rightarrow t_0}{\sim} \frac{(t - t_0)^q}{q!}.$$

Cherchons $\overrightarrow{M^{(q)}}(1)$ ($\overrightarrow{M^{(p)}}(1) = \overrightarrow{M''(1)}$).

$$\begin{cases} x'''(t) = -\frac{12}{t^4} \\ y'''(t) = -\frac{24}{t^5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'''(1) = -12 \\ y'''(1) = -24 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M'''(1)} = (-12, -24) \neq (0, 0).$$

$\overrightarrow{M''(1)}$ et $\overrightarrow{M'''(1)}$ ne sont pas colinéaires (linéairement indépendants). On est donc dans le cas $p = 2$ (c-a-d paire) et $q = 3$ (c-a-d impaire), alors $M(1)$ est un point de rebroussement de première espèce.



6) Points doubles :

Cela revient à chercher $t \neq t'$ tel que $M(t) = M(t')$, c-a-d résoudre le système

$$\begin{cases} x(t) = x(t') \\ y(t) = y(t') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + \frac{2}{t} = t'^2 + \frac{2}{t'} \\ t^2 + \frac{1}{t^2} = t'^2 + \frac{1}{t'^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - t'^2 = \frac{2}{t'} - \frac{2}{t} = 2 \frac{t-t'}{t't} \\ t^2 - t'^2 = \frac{1}{t'^2} - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - t'^2}{t'^2 t^2} \end{cases} \stackrel{t \neq t'}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{t \neq t'}{\Leftrightarrow} \begin{cases} t + t' = \frac{2}{t't} & (1) \\ t + t' = \frac{t+t'}{t'^2 t^2} & (2) \end{cases} \stackrel{de (1) t+t' \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} t + t' = \frac{2}{t't} \\ 1 = \frac{1}{(t't)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + t' = \frac{2}{t't} \\ t't = \pm 1 \end{cases}$$

Ceci revient à résoudre deux systèmes

$$i) \begin{cases} t + t' = \frac{2}{1} \\ t't = 1 \end{cases} \Rightarrow t' = \frac{1}{t} \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ et } t' = \frac{1}{t}.$$

On exclut cette solution puisqu'on doit avoir $t \neq t'$.

$$ii) \begin{cases} t + t' = \frac{2}{-1} \\ t't = -1 \end{cases} \Rightarrow t' = -\frac{1}{t} \Rightarrow t - \frac{1}{t} = -2 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = -1 + \sqrt{2} \text{ et } t_2 = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow t'_1 = -1 - \sqrt{2} = t_2 \text{ et } t'_2 = -1 + \sqrt{2} = t_1.$$

On a donc un seul point double $M(t_1 = t'_2) = M(t'_1 = t_2) = (5, 6)$.

7) Tracé de Γ :

Pour bien tracer la courbe Γ , cherchons un éventuel point d'intersection de cette courbe avec son asymptote $y = x$, puis cherchons le signe de $y(t) - x(t)$, quand $t \rightarrow \pm\infty$, pour voir si la courbe est au-dessus ou au-dessous de cette asymptote.

- La recherche d'un point d'intersection de Γ avec son asymptote $y = x$ revient à résoudre l'équation

$$y(t) = x(t) \Leftrightarrow t^2 + \frac{2}{t} = t^2 + \frac{1}{t^2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent $M(0.5) = (4.25, 4.25)$ est le point recherché.

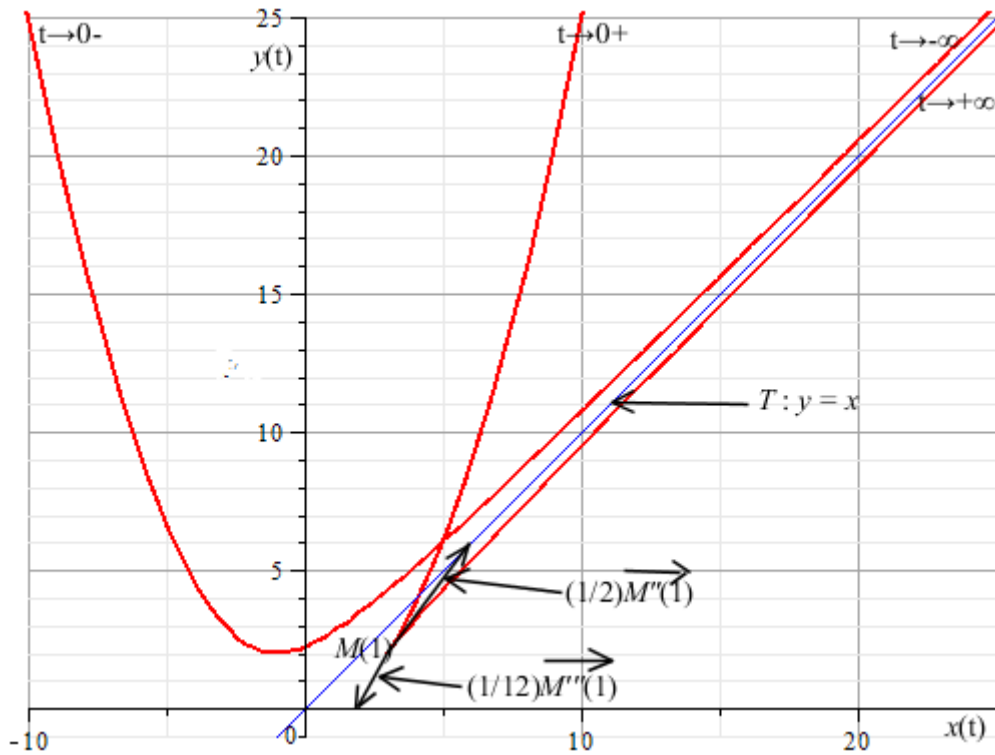
- Signe de $y(t) - x(t)$, quand $t \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (y(t) - x(t)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} \right) = 0^+ - 0^- = 0^+,$$

donc Γ se trouve au-dessus de l'asymptote quand $t \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (y(t) - x(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} - 2 \right) = 0^+(0^+ - 2) = 0^-,$$

donc Γ se trouve au-dessous de l'asymptote quand $t \rightarrow +\infty$.



Exercice 5: Etudier localement, quand $t \rightarrow 1$, la courbe paramétrée (Γ, M) définie par :

$$M(t) = (x(t), y(t)) = (1 + t(t-2)(t-1)^3, -1 + (t^2 - 2t + 5)(t-1)^3).$$

Solution :

Reparamétrisons la courbe Γ , par une application M_1 plus simplifiée que M . Prenons l'homéomorphisme $u = \phi(t) = t - 1$, donc $t = \phi^{-1}(u) = u + 1$, tel que

$$\begin{aligned} M(t) &= M(\phi^{-1}(u)) = (M \circ \phi^{-1})(u) = M_1(u) \\ &= (1 + (u+1)(u-1)u^3, -1 + (u^2 + 4)u^3) \\ &= (1 - u^3 + u^5, -1 + 4u^3 + u^5). \end{aligned}$$

Quand $t = 1$, $u = 0$; cela revient à faire l'étude locale de (Γ, M_1) quand $u \rightarrow 0$.

Dérivons successivement (voir cours):

$$M_1'(u) = (-3u^2 + 5u^4, 12u^2 + 5u^4) \Rightarrow M_1'(0) = (0, 0).$$

$M_1(0) = M(1) = (1, -1)$ est donc un point singulier.

$$M_1''(u) = (-6u + 20u^3, 24u + 20u^3) \Rightarrow M_1''(0) = (0, 0).$$

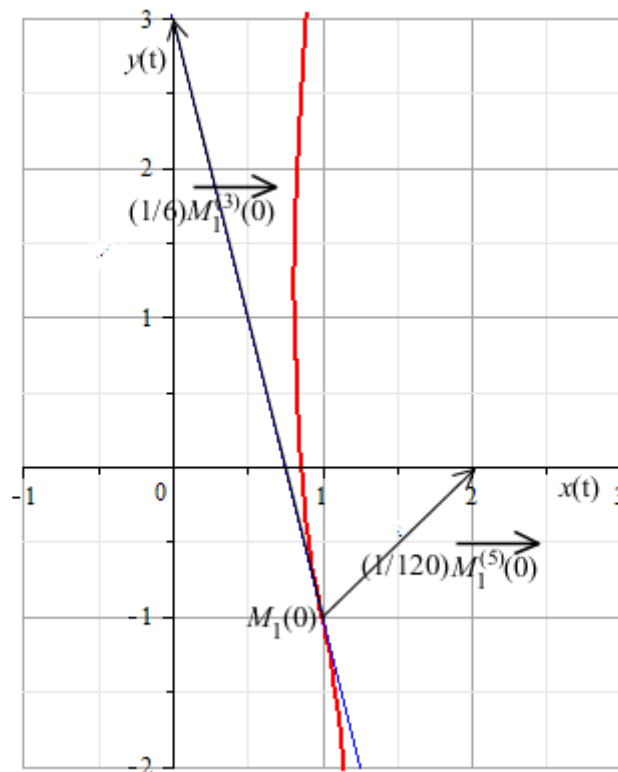
$$M_1^{(3)}(u) = (-6 + 60u^2, 24 + 60u^2) \Rightarrow M_1^{(3)}(0) = (-6, 24) \neq (0, 0).$$

Ceci implique que la courbe Γ a une tangente en $M_1(0) = (1, -1)$ dont $\overrightarrow{M_1^{(3)}(0)}$ est un vecteur directeur. Il est plus pratique de tracer (figure ci-dessous) le vecteur $(1/6)\overrightarrow{M_1^{(3)}(0)}$.

$$M_1^{(4)}(u) = (120u, 120u) \Rightarrow M_1^{(4)}(0) = (0, 0).$$

$$M_1^{(5)}(u) = (120, 120) \Rightarrow M_1^{(5)}(0) = (120, 120) \neq (0, 0).$$

$\overrightarrow{M_1^{(3)}(0)}$ et $\overrightarrow{M_1^{(5)}(0)}$ ne sont pas colinéaires. On est donc dans le cas $p = 3$ (c-a-d impaire) et $q = 5$ (c-a-d impaire), alors $M_1(0) = M(1) = (1, -1)$ est un point d'inflexion.



Exercice 6: Etudier localement, quand $t \rightarrow 1$, la courbe paramétrée (Γ, M) définie par :

$$M(t) = (x(t), y(t)) = \left(t(3 - 2t)(t - 1)^2, t - 1 + \frac{1}{t} \right).$$

Solution :

$$M(t) = \left(t(3-2t)(t-1)^2, t-1 + \frac{1}{t} \right) = \left(-2t^4 + 7t^3 - 8t^2 + 3t, t-1 + \frac{1}{t} \right)$$

Dérivons successivement :

$$M'(t) = \left(-8t^3 + 21t^2 - 16t + 3, 1 - \frac{1}{t^2} \right) \Rightarrow M'(1) = (0,0).$$

$M(1) = (0,1)$ est donc un point singulier.

$$M''(t) = \left(-24t^2 + 42t - 16, \frac{2}{t^3} \right) \Rightarrow M''(1) = (2,2) \neq (0,0).$$

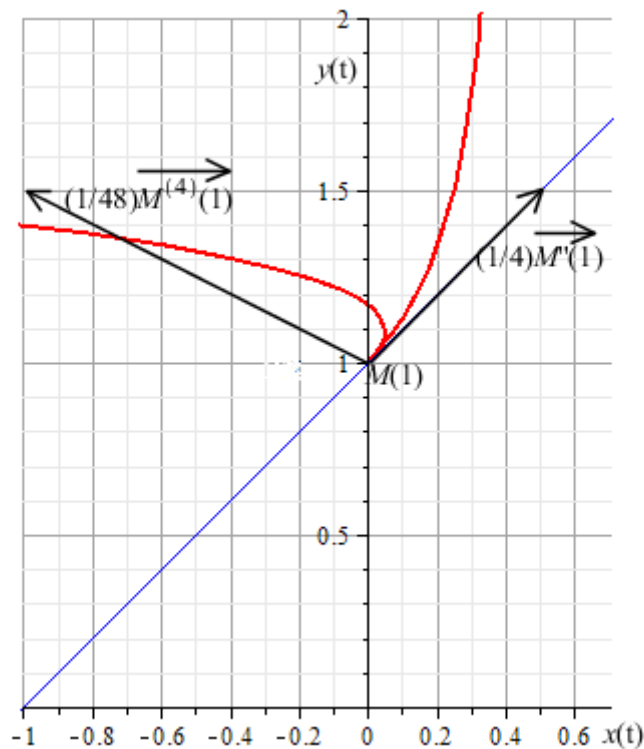
Ceci implique que $\overrightarrow{M''(1)}$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(1)$.

$$M^{(3)}(t) = \left(-48t + 42, -\frac{6}{t^4} \right) \Rightarrow M^{(3)}(1) = (-6, -6) \neq (0,0).$$

$\overrightarrow{M^{(3)}(1)} \neq \vec{0}$ mais est colinéaire à $\overrightarrow{M''(1)}$. Ces deux derniers vecteurs ne peuvent constituer une base de $\mathbb{R}^2$ (voir cours).

$$M^{(4)}(t) = \left(-48, \frac{24}{t^5} \right) \Rightarrow M^{(4)}(1) = (-48, 24) \neq (0,0).$$

$\overrightarrow{M^{(4)}(1)} \neq \vec{0}$ et est non colinéaire à $\overrightarrow{M''(1)}$. On est donc dans le cas $p = 2$ (c-a-d paire) et $q = 4$ (c-a-d paire), alors $M(1) = (0,1)$ est un point de rebroussement de deuxième espèce.



Exercice 7: Etudier la courbe paramétrée (Γ, M) définie par :

$$M(t) = (x(t), y(t)) = (\sin^3 t, \cos 3t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Solution :

1) Périodicité : $x(t) = \sin^3 t = \sin^3(t + 2\pi) = x(t + 2\pi)$

$$y(t) = \cos 3t = \cos(3t + 2\pi) = \cos\left(3\left(t + \frac{2}{3}\pi\right)\right) = y\left(t + \frac{2}{3}\pi\right)$$

La période de $x(t)$ est 2π , la période de $y(t)$ est $\frac{2}{3}\pi$, alors la période de $M(t)$ est le plus petit multiple commun des périodes de $x(t)$ et $y(t)$, qui est 2π .

(Γ, M) est alors une courbe paramétrée périodique (c-a-d Γ est une courbe fermée), il suffit de l'étudier sur une période et on choisira l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

2) Symétrie :

$$x(-t) = \sin^3(-t) = -\sin^3 t = -x(t) \Rightarrow x(t) \text{ est impaire,}$$

$$y(-t) = \cos(-3t) = \cos 3t = y(t) \Rightarrow y(t) \text{ est paire,}$$

Ceci implique que (Γ, M) a une symétrie par rapport à l'axe Oy. On étudiera donc l'application M sur $[0, \pi]$ et on complétera la courbe, sur $[-\pi, 0]$, par son symétrique par rapport à l'axe Oy.

3) $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin t| \leq 1$ et $|\cos t| \leq 1$, donc (Γ, M) n'a pas de branche infinie.

4) Tableau de variation des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de la représentation paramétrique M :

$$M'(t) = (x'(t), y'(t)) = (3 \sin^2 t \cdot \cos t, -3 \sin 3t).$$

Cherchons les points qui annulent cette dérivée (c-a-d les points singuliers):

$$M'(t) = (0, 0) \text{ sur } [0, \pi] \Leftrightarrow x'(t) = 0 \text{ et } y'(t) = 0.$$

$$x'(t) = 3 \sin^2 t \cdot \cos t = 0 \Rightarrow t = 0, t = \frac{\pi}{2}, t = \pi.$$

$$y'(t) = 0 ?$$

comme $t \in [0, \pi] \Leftrightarrow 3t \in [0, 3\pi]$, alors

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin 3t = 0 \Rightarrow 3t = 0, 3t = \pi, 3t = 2\pi, 3t = 3\pi.$$

$$\text{Donc } y'(t) = -3 \sin 3t = 0 \text{ pour } \Rightarrow t = 0, t = \frac{\pi}{3}, t = \frac{2\pi}{3}, t = \pi.$$

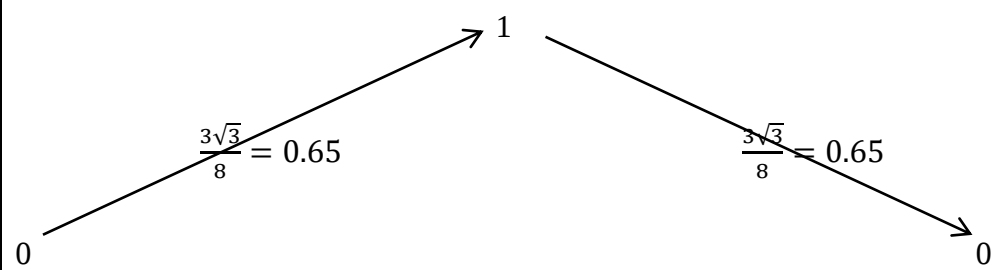
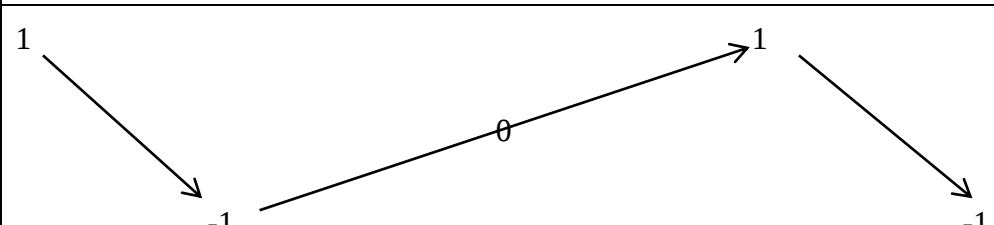
Par conséquent $M'(t) = (0, 0)$ pour $t = 0$ et $t = \pi$. Ainsi $M(0) = (0, 1)$ et $M(\pi) = (0, -1)$ sont des points singuliers.

$$x'(t) = 3 \sin^2 t \cdot \cos t > 0 \Leftrightarrow t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$x'(t) = 3 \sin^2 t \cdot \cos t < 0 \Leftrightarrow t \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[.$$

$$y'(t) = -3 \sin 3t > 0 \Leftrightarrow \sin 3t < 0 \Leftrightarrow \pi < 3t < 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}.$$

$$y'(t) = -3 \sin 3t < 0 \Leftrightarrow \sin 3t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3t < \pi \Leftrightarrow 0 < t < \frac{\pi}{3} \\ \text{et} \\ 2\pi < 3t < 3\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} < t < \pi. \end{cases}$$

t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π		
$x'(t)$	0	+	+	0	-	-	0
$x(t)$							
$y'(t)$	0	-	0	+	0	-	0
$y(t)$							

5) Nature des points singuliers $M(0)$ et $M(\pi)$

$$M''(t) = (6 \sin t \cdot \cos^2 t - 3 \sin^3 t, -9 \cos 3t) \Rightarrow M''(0) = (0, -9), M''(\pi) = (0, 9).$$

$$M'''(t) = (6 \cos^3 t - 12 \sin^2 t \cos t - 9 \sin^2 t \cos t, 27 \cos 3t) \Rightarrow M'''(0) = (6, 0),$$

$$M'''(\pi) = (-6, 0).$$

$\overrightarrow{M''(0)}$ et $\overrightarrow{M'''(0)}$ sont linéairement indépendants $\Rightarrow p = 2$ et $q = 3$, donc $M(0) = (0, 1)$ est un point de rebroussement de 1^{ère} espèce.

$\overrightarrow{M''(\pi)}$ et $\overrightarrow{M'''(\pi)}$ sont linéairement indépendants $\Rightarrow p = 2$ et $q = 3$, donc $M(\pi) = (0, -1)$ est un point de rebroussement de 1^{ère} espèce.

6) Points doubles

Cherchons $t \neq t'$ tel que $M(t) = M(t')$.

$$\begin{cases} x(t) = x(t') \\ y(t) = y(t') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^3 t = \sin^3 t' & (1) \\ \cos 3t = \cos 3t' & (2) \end{cases}$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \sin t = \sin t', \quad t, t' \in [0, \pi] \quad \Rightarrow \quad t' = \pi - t \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \cos 3t = \cos 3(\pi - t) = \cos(3\pi - 3t) = -\cos 3t \Rightarrow \cos 3t = 0 \text{ avec } 0 < 3t < 3\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3t = \frac{\pi}{2} \\ 3t = \frac{3\pi}{2} \\ 3t = \frac{5\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} & t' = \pi - t = \frac{5\pi}{6} \\ t = \frac{\pi}{2} & t' = \frac{\pi}{2} \text{ exclu puisque } t = t'. \\ t = \frac{5\pi}{6} & t' = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

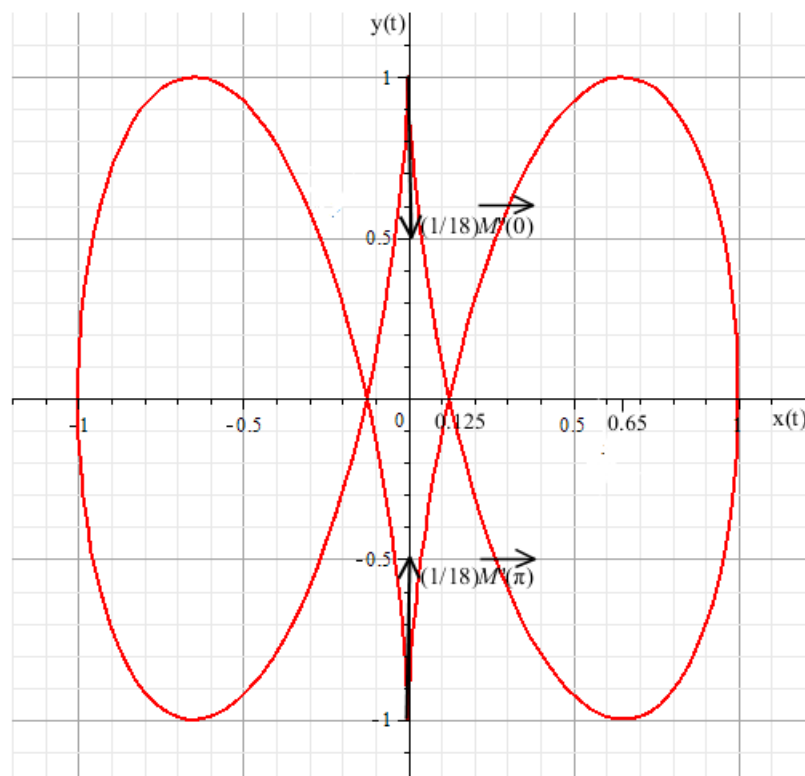
Par conséquent, on a un seul point double sur $[0, \pi]$, qui est $M(\pi/6) = M(5\pi/6) = (1/8, 0) = (0.125, 0)$.

7) Intersections de Γ avec les axes Ox et Oy

- Intersections avec l'axe Oy $\Rightarrow x(t) = \sin^3 t = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ et } \pi \Rightarrow y(0) = 1 \text{ et } y(\pi) = -1$. Ainsi $M(0) = (0, 1)$ et $M(\pi) = (0, -1)$ sont les points d'intersection de Γ avec l'axe Oy.

- Intersections avec l'axe Ox $\Rightarrow y(t) = \cos 3t = 0 \Rightarrow t = \pi/6, t = \pi/2, 5\pi/6 \Rightarrow x(\pi/2) = 1, x(\pi/6) = x(5\pi/6) = 1/8$. Les points d'intersection de Γ avec l'axe Ox sont $M(\pi/2) = (1, 0)$ et $M(\pi/6) = M(5\pi/6) = (1/8, 0)$ (ce dernier est aussi point double).

8) Tracé de Γ



Remarque : En faisant le changement de paramètre (reparamétrisation) $u = \phi(t) = t - \frac{\pi}{2}$, on montre que l'arc de courbe de Γ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est symétrique, par rapport à l'axe Ox, à l'arc de courbe de Γ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

En effet, on a : $t \in [0, \pi] \Leftrightarrow u = t - \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et on a :

$$\begin{aligned}\tilde{M}(u) = M(t) = M(\phi^{-1}(u)) &= M\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin^3\left(u + \frac{\pi}{2}\right), \cos 3\left(u + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \\ &= (\cos^3 u, \sin 3u) = (\tilde{x}(u), \tilde{y}(u)),\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{x}(-u) = \cos^3(-u) = \cos^3 u = \tilde{x}(u) \quad \text{et} \quad \tilde{y}(-u) = \sin(3(-u)) = -\sin 3u = -\tilde{y}(u).$$

Ceci implique que Γ a une symétrie par rapport à l'axe Ox.