الفصل الثاني

المتغيرات العشوائية
Variables Aléatoires

أ.فؤاد العيسوب

عند رمي قطعة النقود ثلاث مرات متتالية

المجموعة الأساسية في هذه التجربة هي :

$$\Omega = \{ PPP , PPF , PFP , FPP , FFF , FPF , FFP , PFF \}$$

اذا كان X يمثل ظهور P في كل نتيجة

$$\Omega = \{ PPP , PPF , PFP , FPP , FFF , FPF , FFP , PFF \}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$3 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

X يربط بين عناصر المجموعة الأساسية و مجموعة الأعداد الحقيقية {0,1,2.3}

X دالة حقيقية تسمى بـــ متغير عشوائي

1-2 المتغيرات العشوائية

•تعريف المتغير العشوائي:

المتغير العشوائي X هو دالة حقيقية تعرف على المجموعة الأساسية Ω, أي أن المتغير العشوائي هو دالة معرفة على المجموعة الأساسية Ω حيث مجموعة وصولها هي مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

•المتغير العشوائي يعطي قيمة حقيقية وحيدة لكل عنصر من عناصر المجموعة الأساسية Ω

•المتغير العشوائي X هو تطبيق مجالة المجموعة الأساسية Ω ومجاله المقابل مجموعة من الاعداد الحقيقية R .

$$X : \Omega \rightarrow X(\Omega) \subset IR$$
$$\omega \mapsto X(\omega)$$

هناك عدة أنواع للمتغيرات العشوائية نذكر منها نوعين هما:

•متغيرات عشوائية منفصلة أو متقطعة Variables Aléatoires Discrètes

•متغيرات عشوائية متصلة أو مستمرة Variables Aléatoires Continues

2-2 المتغيرات العشوائية المتقطعة

•تعريف :

يكون المتغير العشوائي X متغيرعشوائي متقطع إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له X(Ω) هي مجموعة منتهية أو غير منتهية لكن قابلة للعد.

Xعدد الأولاد الذكور في الأسرة المكونة من أربع أولاد، $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$

•تعريف القانون الاحتمالي :

هو كل جدول أو صيغة رياضية تعطي جميع القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي مع احتمال كل قيمة منها بحيث يتحقق ما يلي

$$\sum P(X = x_i) = 1$$

P(x) >= 0

مثال (1) :

اذا اخترنا عشوائيا ثلاثة مؤسسات في منطقة ما , و عرف المتغير العشوائي X عدد المؤسسات الناجحة S

أوجد المجموعة الأساسية, أوجد القيم الممكنة للمتغير X, اوجد احتمال جميع نقاط المجموعة التي ارتبطت بكل قيمة من قيم المتغير X

1) نجد المجموعة الأساسية

$\Omega = \{SSS,SSE,SES,SEE,ESS,ESE,EES,EEE\}$

2) نجد القيم الممكنة للمتغير X

$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

3) نجد احتمال جميع نقاط المجموعة التي ارتبطت بكل قيمة من قيم المتغير X

$P(X=0)= 1/8$

$P(X=1)= 3/8$

$P(x=2)= 3/8$

$P(x=3)= 1/8$

X	0	1	2	3
P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8

مثال 2 :

من المجموعة الأساسية لاختيار ثلاثة مؤسسات , أوجد Y= القيمة المطلقة للفرق بين عدد S و عدد E في كل حالة.

1) نجد المجموعة الاساسية

Ω = {SSS,SSE,SES,SEE,ESS,ESE,EES,EEE

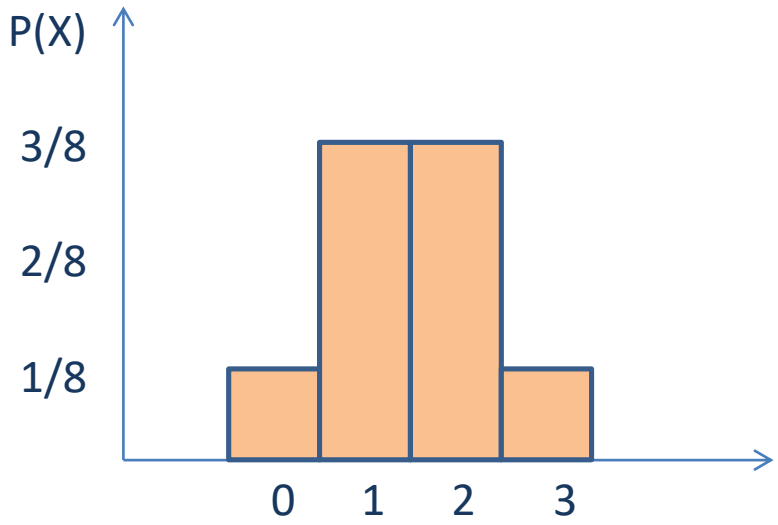
2) نجد القيم الممكنة للمتغير Y

Y={1,3}

باستخدام التعريف نجد :

القيمة	1	3
P(Y=y)	6/8=3/4	2/8=1/4

باستخدام المدرج التكراري



مثال

عند رمي حجر النرد مرتين متتاليتين , نعرف X على أنه مجموع الرقمين الظاهرين

المجموعة الأساسية في هذه التجربة هو : عدد عناصر المجموعة الأساسية $= 6^2 = 36$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

X متغير عشوائي معرف على Ω , مجموعته X(Ω) هي {2,3,4,.....,11,12}

ماهو احتمال X=4 ؟ أي احتمال ان يكون مجموع العددين = 4

X= 4 عند الثنائيات {(3,1), (2,2), (1,3)}

P(X=4) = 3/36 =0.0833

مثال(4) :

هل التطبيق $P(X=x)= X/10$; $X= 1,2,3,4$

غير ذلك $P(X=x)=0$, يمثل قانوناً احتمالياً ؟

الشرط 1: $\sum p(X)= 1$

$\sum p(X)= \sum x/10=1/10+2/10+3/10+4/10 = 1$

الشرط 2 : $P(X)>=0$

الواضح أنه لهذه القيم $x=1,2,3,4$ الاحتمال موجب ,لغير هذه القيم $p(x)=0$

إذن يحقق الشرط

فهو بالتالي قانونا احتماليا

3-2 التوقع (الأمل) الرياضي Espérence Mathématique

•تعريف التوقع الرياضي :

اذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا مجموعته الأساسية تحتوي على n عنصرا و كان قانونه الاحتمالي P(X=x) فإن توقعه الرياضي (وسطه) يكون :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

مثال

أوجد معدل عدد الاعطال في الاسبوع لجهاز الحاسوب اذا كان القانون الاحتمالي للاعطال الاسبوعية كما في الجدول

X	P(X=x)	X P(X=x)
0	0.60	0.00
1	0.30	0.30
2	0.10	0.20
3	0.07	0.21
4	0.03	0.12
المجموع		**0.83**

- خواص التوقع الرياضي
- $E(a) = a$
- $E(X \pm b) = E(X) \pm b$
- $E(aX) = a\,E(X)$
- $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$

- التوقع الرياضي لمجموع متغيرين عشوائيين = مجموع التوقعين الرياضيين أي:
- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- $E(X\,Y)=E(X)\,E(Y)$

تمـرين

إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد حوادث السير في مدينة ما وكان C عدد حقيقي ثابت والقانون الاحتمالي لـ X هو:

X = x	0	1	2	3	4	5
P(X=x)	C	C2	C3	C4	C1.5	C0.5

أولا: أوجد قيمة الثابت C

ثانيا:

$$P(X<3) \quad , \quad P(0<X\leq 4) \quad , \quad P(0<X<2)$$

أوجد:

ثالثا: أوجد الأمل الرياضي لـ X

- تعريف التباين Variance:

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i)$$

- تعريف الانحراف المعياري Ecart-type

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

- خواص التباين
- Var(a) =0
- Var (X±b) = Var (X)

مثال(6)

أوجد تباين X و الانحراف المعياري الاعطال في الاسبوع لجهاز الحاسوب اذا كان الاقتران الاحتمالي للاعطال الاسبوعية كما في الجدول

X	P(X)
0	0.60
1	0.20
2	0.10
3	0.07
4	0.03

X	P(X)	X P(X)
0	0.60	0.00
1	0.20	0.20
2	0.10	0.20
3	0.07	0.21
4	0.03	0.12
المجموع		

التباين σ^2 1.177

الانحراف المعياري σ $= \sqrt{\sigma^2}$

$= \sqrt{1.177} = 1.08$

2-2 المتغيرات العشوائية المستمرة

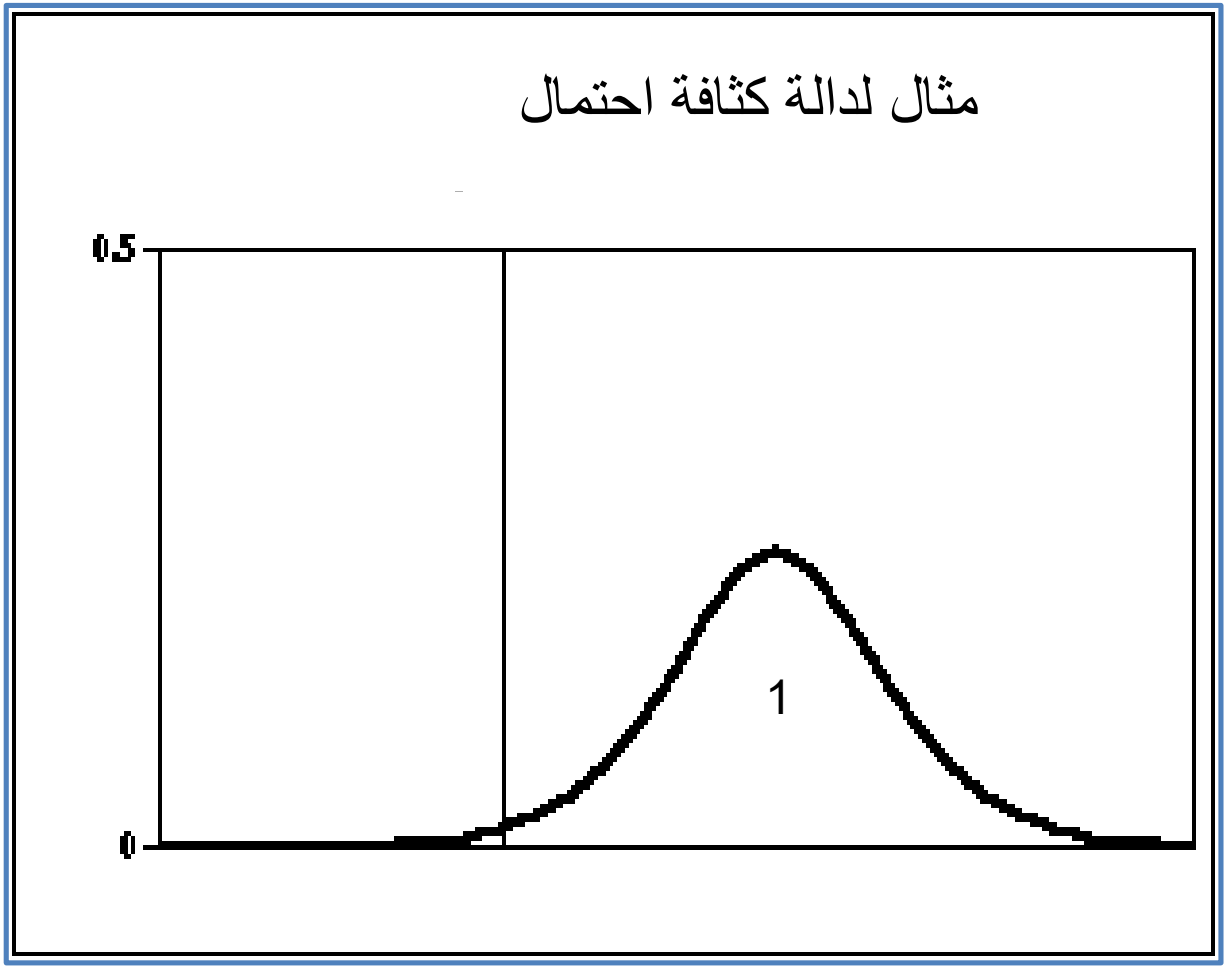
1-2-2 دالة كثافة الاحتمال

$$1- \quad f(x) \geq 0 \qquad x \in IR$$

$$2- \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

2-2 المتغيرات العشوائية المستمرة

2-2-1 دالة كثافة الاحتمال



مثال

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

- $f(x)=2x\geq 0 \qquad x\in IR$

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{1} 2x\,dx+\int_{0}^{+\infty} 0\,dx$$

$$=2\frac{x^2}{2}\Big]_0^1=1$$

2-2-2 حساب الاحتمال

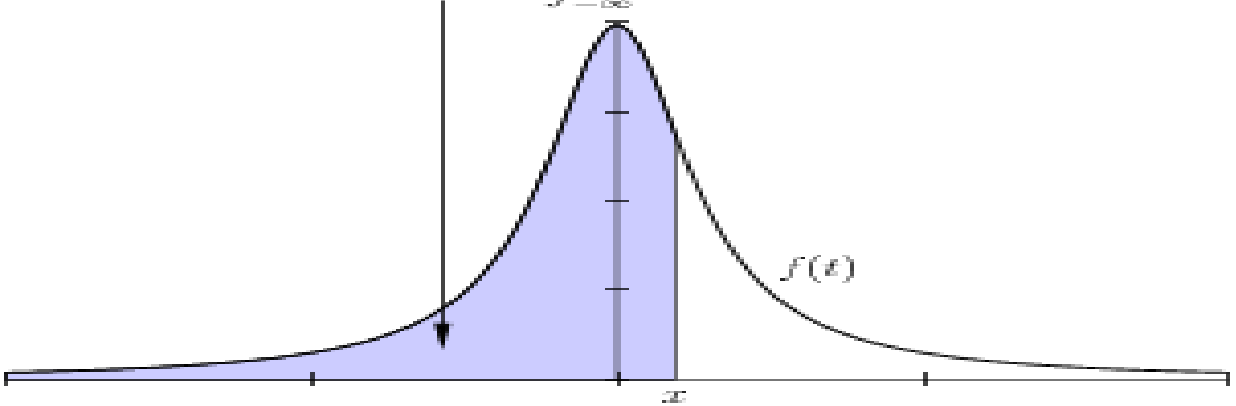
$$P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

$$P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

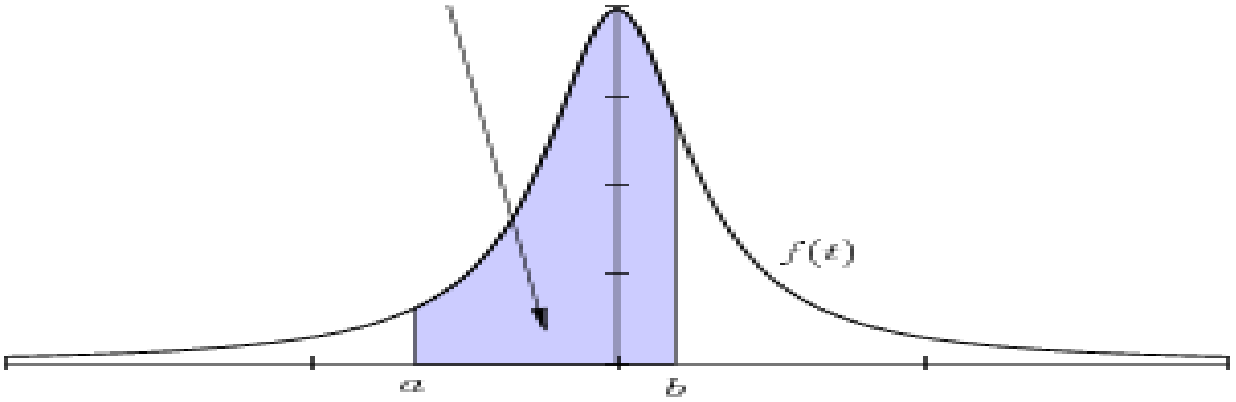
$$P(X = a) = 0$$

2-2-2 حساب الاحتمال

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$



$$P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$



3-2-2 دالة كثافة الاحتمال

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

مثال : حساب دالة التوزيع للمثال السابق

$$f(x)=\begin{cases}0 &]-\infty,0] \\ 2x & 0<x<1 \\ 0 & [1,+\infty[\end{cases}$$

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

- $x\in\,]-\infty,0]$

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0$$

- $x \in]0,1[$

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 2t\,dt$$

$$= 0 + 2\frac{t^2}{2}\Big]_0^x = x^2 - 0^2 = x^2$$

- $x \in [1,+\infty[$

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} 2t\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt$$

$$= 0 + 2\frac{t^2}{2}\Big]_0^1 + 0 = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 &]-\infty, 0] \\ x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & [1, +\infty[\end{cases}$$

* $P(X \leq a) = P(X < a) = F(a)$

* $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F(a)$

* $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) =$
$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$