

Analyse fonctionnelle appliquée
Chapitre 3: Problèmes elliptiques

Lahcène CHORFI
Dept. de Maths, Université B.M. d' Annaba

11 Avril 2020

Table des matières

1	Résolution de problèmes aux limites elliptiques par la méthode variationnelle	2
1.1	Rappel: Théorème de Lax-Milgram	2
1.2	Problème de Dirichlet et de Neumann sur $I =]a, b[$	3
1.2.1	Formulation variationnelle	3
1.3	Problèmes elliptiques en dimension $N \geq 2$	4
1.3.1	Problèmes de Dirichlet homogène	4
1.3.2	Problèmes de Dirichlet non homogène	6
1.3.3	Problèmes de Neumann non homogène	6
1.3.4	Autres exemples	8
1.3.5	Problèmes elliptiques du second ordre	9
1.3.6	Régularité de la solution faible	11

Chapitre 1

Résolution de problèmes aux limites elliptiques par la méthode variationnelle

1.1 Rappel: Théorème de Lax-Milgram

Rappelons le théorème de Lax-Milgram (voir chap. 1)

Hypothèses.

- V espace de Hilbert (réel)
- $a : V \times V \mapsto \mathbf{R}$ une forme bilinéaire continue
- $L \in V'$ une forme linéaire continue sur V .

Définition 1 a est dite coercive (ou V -elliptique) s'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que:

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V$$

Problème variationnel. Trouver $u \in V$ tel que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \tag{1.1}$$

Théorème 1 (Théorème de Lax-Milgram) Si a est coercive, alors le problème (1.1) admet une solution unique. De plus l'application $L \rightarrow u$ solution de (1.1) est continue de $V' \rightarrow V$, plus précisément on a :

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{V'}$$

1.2 Problème de Dirichlet et de Neumann sur $I =]a, b[$

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et $f \in L^2(I)$.

Considérons les problèmes aux limites du type *Dirichlet*

$$(D) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^2(I) \\ -u'' + \lambda u = f, \text{ p.p } x \in I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

et du type *Neumann*

$$(N) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^2(I) \\ -u'' + \lambda u = f, \text{ p.p } x \in I \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

1.2.1 Formulation variationnelle

Soit u solution de (1.2) ou (1.3), alors

$$\forall v \in H^1(I), \quad - \int_I u'' v dx = \int_I u' v' dx$$

Soit la forme bilinéaire $a : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$, $V = H^1(I)$, définie par

$$a(u, v) = \int_I (u' v' + \lambda u v) dx$$

Donc le problème (1.2) est équivalent au problème variationnel

$$(DV) \quad \exists u \in H_0^1(I), \forall v \in H_0^1(I), a(u, v) = (f, v)_{L^2(I)} \quad (1.4)$$

le problème (1.3) est équivalent au problème variationnel

$$(NV) \quad \exists u \in H^1(I), \forall v \in H^1(I), a(u, v) = (f, v)_{L^2(I)} \quad (1.5)$$

Proposition 1 *Si $\lambda > 0$, les problèmes (1.4) et (1.5) admettent une solution unique.*

Preuve. On applique le théorème de Lax-Milgram dans le cas $V = H_0^1(I)$ pour (D) et $V = H^1(I)$ pour (N). Remarquons que $a(u, v)$ est coercive avec une constante $\alpha = \min(1, \lambda)$. $\square$

Théorème 2 *Le problème (D) (resp (N)) est équivalent à (DV) (resp. (NV)).*

Preuve. On a déjà vu que $(D) \Rightarrow (DV)$ (resp. $(N) \Rightarrow (NV)$). Montrons la réciproque. $D(I) \subset V$, alors

$$\forall \varphi \in D(I), a(u, \varphi) = \int_I f u dx$$

entraîne $u \in H^2(I)$ et

$$-u'' + \lambda u = f, \text{ p.p. } x \in I \quad (1.6)$$

La condition limite pour (D) est satisfaite car $u \in H_0^1(I)$. Pour (N), on intègre par parties dans (NV), ce qui donne avec l'équation différentielle (1.6)

$$u'(1)v(1) = u'(0)v(0), \forall v \in H^1(I).$$

En choisissant $v(0) = 1$ et $v(1) = 0$, on déduit $u'(0) = 0$, puis $v(0) = 0$ et $v(1) = 1$, on déduit $u'(1) = 0$. $\square$

Remarque 1 *Cas $\lambda = 0$.*

- Pour (D) on a existence et unicité car a est coercive d'après l'inégalité de Poincaré $\forall v \in H_0^1(I), \|v'\|_{L^2} \geq C\|v\|_{L^2}^2$.
- Pour (N), la solution n'est pas unique ($u = u_0 + c$ définie à une constante près)

1.3 Problèmes elliptiques en dimension $N \geq 2$

1.3.1 Problèmes de Dirichlet homogène

Soit Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ . Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $c(x) \in L^\infty(\Omega)$. Considérons le problème de Dirichlet suivant

$$(D) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^2(\Omega) \\ -\Delta u + c(x)u = f, \text{ p.p } x \in \Omega \\ u(x) = 0, x \in \Gamma \end{cases} \quad (1.7)$$

Supposons que u est une solution de (1.7) et $v \in H^1(\Omega)$, on multiplie l'EDP par v et on intègre sur Ω , alors

$$\int_{\Omega} (-\Delta u v + c(x) u v) dx = \int_{\Omega} f v dx$$

En appliquant la formule de Green, on obtient

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} \gamma_1(u) \gamma_0(v) ds = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx, \quad (\text{car } \gamma_0(v) = 0)$$

D'où la formulation variationnelle

$$\text{Trouver } u \in V, \text{ tel que } \forall v \in V, a(u, v) = L(v) \quad (1.8)$$

où on a posé

$$\begin{aligned} - V &= H_0^1(\Omega) \\ - a(u, v) &= \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + c(x)uv) dx \\ - L(v) &= \int_{\Omega} f v dx \end{aligned}$$

Proposition 2 *Soit $u \in H^2(\Omega)$. Alors u est solution de (1.7) si et seulement si u solution de (1.8)*

Preuve. On a déjà vu que (1.7) $\Rightarrow$ (1.8). Montrons la réciproque. Soit u solution de (1.8) et $\varphi \in D(\Omega)$, alors

$$\sum_{i=1}^N (D_i u, D_i \varphi)_{L^2} + (cu, \varphi)_{L^2} = (f, \varphi)_{L^2}$$

ce qui montre que

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{dans } D'(\Omega)$$

Donc presque partout. La condition $\gamma_0(u) = 0$ est satisfaite car $u \in H_0^1(\Omega)$.

□

Remarque 2 *Il n'est pas nécessaire de supposer que $u \in H^2(\Omega)$, dans ce cas l'EDP est satisfaite au sens très faible (dans D'). Si Ω est régulier (de classe C^1), on peut montrer que $u \in H^2$.*

Pour l'existence de la solution faible de (1.8), on vérifie les hypothèses du théorème de L-M, en particulier la coercivité de $a(u, v)$.

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \|\nabla v\|_{L^2}^2 + c_- \|v\|_{L^2}^2 \quad \text{avec } c_- = \inf_{x \in \Omega} c(x) \\ &\geq \alpha \|\nabla v\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{1}{2}(1 + c_p^2 c_-) > 0$ si $\|c\|_{\infty} < c_p$ avec c_p la constante de Poincaré. On vient à démontrer le théorème

Théorème 3 *Il existe $c_0 \in \mathbf{R}$ tel que, si $c(x) \geq c_0$, alors le problème variationnel (1.8) admet une solution unique. De plus $\|u\|_{H^1} \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2}$.*

1.3.2 Problèmes de Dirichlet non homogène

Considérons le problème de Dirichlet non homogène

$$(DNH) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^2(\Omega) \\ -\Delta u + c(x)u = f, \text{ p.p } x \in \Omega \\ \gamma_0(u) = g, g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{cases} \quad (1.9)$$

Considérons un relèvement de g , c'est à dire il existe $G \in H^1(\Omega)$ tel que $\gamma_0(G) = g \Leftrightarrow G = R_0(g)$.

Par un changement d'inconnue $\tilde{u} = u - G$, on transforme ce problème en un problème homogène

$$(\tilde{D}) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \tilde{u} \in H^2(\Omega) \\ -\Delta \tilde{u} + c(x)\tilde{u} = F, \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow D' \\ \gamma_0(\tilde{u}) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Avec le second membre $F = f\Delta - cG$ vérifiant

$$\|F\|_{H^{-1}} \leq C(\|f\|_{L^2} + \|G\|_{H^1}) \leq C(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^{1/2}}) \quad (1.11)$$

Le théorème de L-M s'applique donc et on a l'inégalité de stabilité

$$\|u\|_{H^1} \leq C(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^{1/2}})$$

1.3.3 Problèmes de Neumann non homogène

Considérons le problème de Neumann non homogène

$$(NNH) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^2(\Omega) \\ -\Delta u + c(x)u = f, \text{ p.p } x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x), g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{cases} \quad (1.12)$$

Formulation variationnelle

Soit $v \in H^1(\Omega)$, en appliquant la formule de Green, on obtient

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} \gamma_1(u) \gamma_0(v) ds = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} g v ds$$

D'où la formulation variationnelle

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que: } \forall v \in V, a(u,v) = L(v) \quad (1.13)$$

où on a posé

$$\begin{aligned} - V &= H^1(\Omega) \\ - a(u,v) &= \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + c(x)uv) dx \\ - L(v) &= \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v ds \end{aligned}$$

Théorème 4 *Supposons que $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$. Supposons qu'il existe $c_0 > 0$ tel que, si $c(x) \geq c_0$. Alors le problème variationnel (1.13) admet une solution unique. Par ailleurs il existe $C \geq 0$ telle que*

$$\|u\|_{H^1} \leq C(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2})$$

Preuve.

$$\begin{aligned} - L \text{ est continue: } |L(v)| &\leq (\|f\|_0 \|v\|_0 + \|g\|_0 \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma)}) \leq C(\|f\|_0 + \|v\|_1) \\ - a \text{ est continue: } |a(u,v)| &\leq \max(1, c_{\infty}) \|u\|_1 \|v\|_1 \quad (c_{\infty} = \sup |c(x)|) \\ - a \text{ est coercive: } a(v,v) &\geq \min(1, c_0) \|v\|_1^2 \end{aligned}$$

□

Equivalence avec (1.12)

Soit u solution de (1.13) et $\varphi \in D(\Omega)$, alors

$$\langle -\Delta u + cu - f, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow -\Delta u + cu = f \text{ au sens de } D'$$

si Ω est régulier ceci implique $u \in H^2$ et l'EDP est vérifiée presque partout.

On applique la 1^{ère} formule de Green

$$a(u,v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v ds$$

et comparant avec (1.12) on a

$$\int_{\Gamma} (\gamma_1 u - g) v ds = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

et comme $H^{1/2}(\Gamma)$ est dense dans $L^2(\Gamma)$ on déduit que

$$\gamma_1(u) = g \text{ dans } L^2(\Gamma)$$

Remarque 3 Si $c = 0$ il n'existe une solution que si f et g vérifient la condition de compatibilité

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\Gamma} g ds = 0.$$

Remarquons aussi que si u est solution alors $u + C$, avec $C \in \mathbf{R}$, est aussi une solution.

1.3.4 Autres exemples

Problème mixte (mêlé)

$$(D - N) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \\ -\Delta u + \lambda u = f, \text{ p.p } x \in \Omega \\ \gamma_0(u)|_{\Gamma_0} = 0, \gamma_1(u)|_{\Gamma \setminus \Gamma_0} = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

- $V = H^1(\Omega, \Gamma_0) = \{v \in H^1(\Omega), \gamma_0(u)|_{\Gamma_0} = 0\}$ sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.
- muni de la norme équivalente $\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$.
- Inégalité de Poincaré-Frederich ([1]): si Ω est connexe et $\text{mes}(\Gamma_0) > 0$, alors

$$\exists C \geq 0, \forall v \in H^1(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)})$$

D'où la formulation variationnelle

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que: } \forall v \in V, a(u, v) = L(v) \quad (1.15)$$

où on a posé

- $V = H^1(\Omega, \Gamma_0)$
- $a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + \lambda uv) dx$
- $L(v) = \int_{\Omega} f v dx$

Si $\lambda \geq 0$, on a existence, unicité et stabilité (pour les détails, voir la série d'exercices N° 3)

Problème de Robin

$$(Robin) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \\ -\Delta u + \lambda u = f, \text{ p.p } x \in \Omega \\ \gamma_1(u) + \alpha \gamma_0(u)|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

– Formulation variationnelle

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que: } \forall v \in V, a(u, v) = L(v) \quad (1.17)$$

où on a posé

$$\begin{aligned} - V &= H^1(\Omega) \\ - a(u, v) &= \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + \lambda uv) dx + \alpha (\gamma_0(u), \gamma_0(v))_{L^2(\Gamma)} \\ - L(v) &= \int_{\Omega} f v dx \end{aligned}$$

Si $\lambda > 0$ et $\alpha \geq 0$, on a existence, unicité et stabilité (pour les détails, voir la série d'exercices $N^o 3$)

1.3.5 Problèmes elliptiques du second ordre

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$, ($N \geq 1$), de frontière Γ . Soient $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1; \dots; N$. On suppose que les fonctions a_{ij} vérifient l'hypothèse d'ellipticité uniforme, c'est-à-dire :

$$\exists \alpha > 0; \quad \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

On se donne $f \in L^2(\Omega)$ et $g : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$, et on cherche une solution au problème :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} Pu := - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_i (a_{ij}(x) \partial_j u)(x) = f(x), x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), x \in \Gamma. \end{cases} \quad (1.18)$$

où $\partial_i u$ désigne la dérivée partielle de u par rapport à sa i -ème variable.

Définition 2 (*Solution classique*) On suppose que $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ pour tout $i, j = 1; \dots; N$. On suppose que $f \in C(\bar{\Omega})$ et $g \in C(\Gamma)$. On appelle alors solution classique de (1.18) une fonction $u \in C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant (1.18).

Il n'existe pas forcément de solution classique à (1.18). Mais il existe des solutions en un sens plus faible que l'on va définir ci-après.

Formulation faible du problème (1.18)

Problème de Dirichlet

On suppose que $g = 0$.

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que: } \forall v \in V, a(u, v) = L(v) \quad (1.19)$$

où on a posé

- $V = H_0^1(\Omega)$
- $a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_j u(x) \partial_i v(x) \right) dx$
- $L(v) = \int_{\Omega} f v dx$

Problème de Neumann

$V = H^1(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$. La condition de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n_A} \Big|_{\Gamma} = g,$$

où $\frac{\partial u}{\partial n_A}$ est la dérivée conormale (oblique) définie comme suit:

- on pose $X = A(x) \nabla u = (X_i) \Leftrightarrow X_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x) D_j u(x)$,
- $X \in H^1$ si $u \in H^2$ et $a_{ij} \in C^1(\Omega)$.
- $\text{Div} X = f \in L^2$
- Formule de Green: $\int_{\Omega} \text{Div} X v \, dx = \int_{\Omega} X \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma} X \cdot n \, v \, ds$

Ce qui justifie la formulation faible

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que: } \forall v \in V, a(u, v) = L(v) \quad (1.20)$$

où on a posé

- $V = H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
- a(u,v) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_j u(x) \partial_i v(x) \right) dx \\
- L(v) &= \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} g v \, ds
\end{aligned}$$

Théorème 5 *Le problème (1.19) ou (1.20) possède une solution unique.*

Remarque 4 – Si $u \in H^1(\Omega, \Delta) = \{v \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ alors la trace normale $\gamma_1(u)$ existe comme est un élément de $H^{-1/2}(\Gamma)$ et on a la formule de Green généralisée

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \langle \gamma_1(u), v \rangle_{-1/2, 1/2}.$$

– De même, Si $u \in H^1(\Omega, P) = \{v \in H^1(\Omega); Pu \in L^2(\Omega)\}$ alors la trace conormale $\frac{\partial u}{\partial n_A} = \gamma_0(A(x) \nabla u)$ existe comme est un élément de $H^{-1/2}(\Gamma)$ et on a la formule de Green généralisée

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} P u v \, dx = a(u,v) - \langle \frac{\partial u}{\partial n_A}, v \rangle_{-1/2, 1/2}.$$

1.3.6 Régularité de la solution faible

Pour la preuve de ces résultats je conseille le lecteur de consulter le livre de Brézis [1].

Théorème 6 *Supposons que $\Omega \in C^2$ et $f \in L^2(\Omega)$, alors la solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation $-\Delta u + u = f$ appartient à $H^2(\Omega)$ et $\|u\|_{H^2} \leq \|f\|_{L^2}$.*

Théorème 7 (Among-Douglas-Nirenberg) *Supposons que $\Omega \in C^{m+2}$ et $f \in H^m(\Omega)$, alors la solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation $-\Delta u + u = f$ appartient à $H^{m+2}(\Omega)$ et $\|u\|_{H^{m+2}} \leq \|f\|_{H^m}$.*

Théorème 8 *Supposons que $\Omega \in C^2$, $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ et $f \in L^2(\Omega)$, alors la solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation $-\text{Div}(A(x) \nabla u) = f$ appartient à $H^2(\Omega)$ et $\|u\|_{H^2} \leq \|f\|_{L^2}$.*

Bibliographie

- [1] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris (1983).
- [2] G. Allaire, Analyse numérique et optimisation (chapitres 3,4 et 5)
<http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/livre2.html>
- [3] Thierry Gallouët, Raphaële Herbin, Equations aux dérivées partielles, Master 2 de mathématiques , Université Aix Marseille (2018)
<https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/thierry.gallouet/master2.d/M2edp.pdf>
- [4] R. Dautray, et J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Vol. 3, Transformations, Sobolev, Opérateurs, Masson, Paris, 1988.
- [5] R. Dautray, et J.-L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Vol. 4, Méthodes variationnelles, Masson, Paris, 1988.
- [6] A. Munnier, Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivés partielles. Université de Nancy, Institut Elie Cartan, 2007-2008