TD (F. Holomorphes)

Ce TD est déstiné aux étudiants de 2^e année licence mines ($Maths$ 4)

April 13, 2020

Exercice 1 *Montrer que la fonction* $f(z) = \dfrac{1}{z}$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Solution
Il suffit de vérifier que f est dérivable par définition.
Pour tout $z \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} &= \lim_{w \to z} \frac{\frac{1}{w} - \frac{1}{z}}{w - z} = \lim_{w \to z} \frac{1}{w - z} \left(\frac{z - w}{w \ z} \right) \\
&= \lim_{w \to z} \frac{-1}{z - w} . \frac{z - w}{w \ z} = \lim_{w \to z} \frac{-1}{w.z} = \frac{-1}{z^2}
\end{aligned}$$

donc, f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $f'(z) = \dfrac{-1}{z^2}$.

Exercice 2 *Vérifier les équations (conditions) de Cauchy-Riemann pour la fonction* $f(z) = z^3$.

Solution
Posons $f(z) = P(x, y) + i \ Q(x, y)$, on a

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^3 \\
&= (x + iy)^3 \\
&= \left(x^3 - 3xy^2\right) + i(3x^2 y - y^3)
\end{aligned}$$

avec $P(x, y) = x^3 - 3xy^2$ et $Q(x, y) = 3x^2 y - y^3$
on a

P, Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$
et

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 - 3y^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= 3x^2 - 3y^2 \end{aligned}$$

en plus,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -6xy \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= 6xy \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

Exercice 3 *Déterminer les constantes a, b, c et d qui rendent la fonction f holomorphe telle que*

$$f(z) = ax + by + i(cx + dy).$$

Solution
Posons $f(z) = P(x,y) + i\ Q(x,y)$
où $P(x,y) = ax + by$ et $Q(x,y) = cx + dy$
on a P et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$.
On va calculer les dérivées partielles suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= a \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= b \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= c \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= d \end{aligned}$$

f est holomorphe si

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \Longrightarrow a=d\\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \Longrightarrow b=-c.\end{aligned}$$

Ainsi

$$f(z) = ax+by+i(-bx+ay), \quad a,\ b\in\mathbb{R}.$$

Exercice 4 ***1)*** *Soit $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ définie par*

$$f(z) = x+2\ i\ xy$$

La fonction f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}$?
2) *Soit $g:\mathbb{C}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{C}$ définie par*

$$g(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

La fonction g est-elle holomorphe $\mathbb{C}\setminus\{0\}$?

Solution
Il suffit de vérifier les conditions de Cauchy-Riemann, *i.e.*

$$\begin{aligned} & P,\ Q \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } E\\ \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).\end{aligned}$$

1) Posons $f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$
avec $P(x,y)=x$ et $Q(x,y)=2xy$
alors P, Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}$
mais

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= 1\\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= 2x\end{aligned}$$

et comme
$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) \neq \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$$
alors f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

1) Posons $g(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$
avec $P(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ et $Q(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$
alors P, Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C} \diagdown \{0\}$
en plus,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{aligned}$$

alors g est holomorphe sur $\mathbb{C} \diagdown \{0\}$.

Exercice 5 *Soit* $P : \mathbb{R}^2 \diagdown \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*
$$P(x,y) = x + \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Trouver une fonction holomorphe f *définie sur* $\mathbb{C} \diagdown \{0\}$ *dont la partie réelle est* P *et telle que* $f(1) = 2$.

Solution
Supposons que $f(z) = P(x,y) + i\ Q(x,y)$
f est holomorphe
donc elle vérifie les condition de Cauchy-Riemann, $i.e$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\\ -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

On va déterminer les fonctions Q de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \diagdown \{(0,0)\}$ vérifiant

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{aligned}$$

On intègre l'équation (1) par rapport à x avec y fixé, alors

$$\begin{aligned}Q(x,y) &= \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\\ &= y\int \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{-y}{x^2+y^2} + k(y)\end{aligned}$$

où $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et k de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour déterminer k, on a

$$Q(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + k(y) \Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} + k'(y)$$

on utilise l'équation (2), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} + k'(y) &= 1 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\\ &\Longrightarrow k'(y) = 1\\ &\Longrightarrow k(y) = y + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

D'où

$$Q(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent,
les fonctions qui ont P comme partie réelle sont

$$\begin{aligned} f(z) &= P(x,y) + i\ Q(x,y) \\ &= \left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\ \left(y - \frac{y}{x^2+y^2} + c\right), \quad c \in \mathbb{R}.........(3) \end{aligned}$$

Pour déterminer la constante c, on utilise la condition $f(1) = 2$ ($z = 1$), on a

$$z = x + i\ y = 1 \Longrightarrow x = 1 \text{ et } y = 0$$

remplaçons par $x = 1$ et $y = 0$ dans (3), on obtient

$$2 = 2 + i\ c \Longrightarrow c = 0.$$

L'unique fonction f dont la partie réelle est P telle que $f(1) = 2$ est

$$f(z) = \left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\ \left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$