Fonctions Holomorphes

Cours pour 2^e année licence mines $\qquad$ $(Maths\ 4)$

April 7, 2020

1 Définitions et notations

Dans cette partie, on rappelle rapidement les principales définitions et les principaux résultats utilisés.

Dans tout ce cours, E désignera un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, Si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - z_0| < r\}$ la boule ouverte de $\mathbb{C}$ de centre z_0 et de rayon r.

Soit une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, lorsque $z = x + i\ y$

$$\mathrm{d}f(z),\ \frac{\partial f}{\partial x}(z) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(z)$$

respectivement la différentielle et les dérivées partielles de la fonctions f au point (x, y).

Définition 1 *Soit une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$.*

1*) f est dérivable en z_0 si et seulement si*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \qquad z \in \mathbb{C} \diagdown \{z_0\}$$

existe et est finie.

Cette limite est alors notée $f'(z_0)$.

2*) On dit que f est holomorphe sur E si et seulement si f est dérivable en tout point de E et sa fonction dérivée f' est continue sur E.*

Théorème 2 *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$.

1) *f est dérivable en z_0 si et seulement si*

$\cdot$ *f est différentiable en z_0*

$\cdot$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.

2) *f est holomorphe sur E si et seulement si*

$\cdot$ *f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E*

$\cdot$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = i\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(z)$, *pour tout* $z \in E$.

Remarque 3 *Si f est dérivable en z, alors*

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

Proposition 4 *Soit une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que*

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y), \qquad z \in E$$

où P, Q sont respectivement les parties réelle et imaginaire de f.

f est holomorphe sur E si et seulement si

$\cdot$ *P, Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur E.*

$\cdot$ $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$ *et* $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$.

Remarque 5 *Si f est holomorphe sur E, alors la matrice jacobienne de f et son jacobien en un point $z \in E$ sont respectivement*

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) & -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix} \\ \det J &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\right)^2. \end{aligned}$$

2 Propriétés

Soient deux fonctions $f,\, g : E \longrightarrow \mathbb{C}$.

Si f, g sont holomorphes sur E, alors

i) $f + \lambda g$ est holomorphe et

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g', \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

ii) $f.g$ est holomorphe sur E et

$$(f.g)' = f'.g + f.g'.$$

iii) $\dfrac{f}{g}$ est holomorphe sur E avec g ne s'annule pas sur E et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}.$$

En particulier,

$\dfrac{1}{g}$ est holomorphe sur E avec g ne s'annule pas sur E et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$

Proposition 6 *Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $f(E) \subset F$.*

Si f et g sont holomorphes sur E et F, successivement, alors

$$g \circ f \text{ est holomorphe sur } E$$

$$(g \circ f)' \;=\; f' \times g' \circ f.$$

3 Exemples fondamentaux

a) Fonction polynomiale

Toute fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{C}$ est holomorphe.

En effet,

$f(z) = z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $f'(z) = 1$
donc
$f(z) = z^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $f'(z) = k\ z^{k-1}$.
Soit $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\ z^k$ une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Et P, comme combinaison linéaire de fonctions holomorphes et $P(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\ a_k\ z^{k-1}$.

b) Fonction exponentielle

Soit $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z \in \mathbb{C}$
donc
exp est de classe $\mathcal{C}^1$, comme produit de fonctions holomorphes et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} e^z &= e^x(\cos y + i \sin y) = e^z \\
\frac{\partial}{\partial y} e^z &= e^x(-\sin y + i \cos y) \\
&= ie^x(\cos y + i \sin y) = ie^z
\end{aligned}$$

et comme

$$\frac{\partial}{\partial x} e^z = i \frac{\partial}{\partial y} e^z \Longrightarrow \exp \text{ est holomorphe sur } \mathbb{C}.$$

Soit $f(z) = e^{\alpha, z}$, α, $z \in \mathbb{C}$, est holomorphe sur $\mathbb{C}$, comme composée de fonctions holomorphes et

$$f'(z) = \alpha e^{\alpha\ z}.$$

Soit maintenant, $g(z) = t^z = e^{z \ln t}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$, $z \in \mathbb{C}$ et

$$g'(z) = \ln t\ e^{z \ln t} = \ln t . t^z.$$

c) Fonctions trigonométriques

Soient $\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$ et $\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$

Les fonctions e^{iz} et e^{-iz} sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ comme composition de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, donc cos et sin sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et

$$
\begin{aligned}
\cos' z &= \frac{1}{2}\left(ie^{iz} - ie^{-iz}\right) \\
&= \frac{-1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\sin z \\
\sin' z &= \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} + ie^{-iz}\right) = \cos z.
\end{aligned}
$$