وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR

BADJI MOKHTAR UNIVERSITY

ANNABA

جامعة باجي مختار - عنابة

Faculté des Sciences

Département de physique

ELECTROSTATIQUE

RAPPELS DE COURS ET EXERCICES AVEC SOLUTIONS

DESTINE AUX ETUDIENTS DE PREMIERE ANNEE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

Dr. LAMOUDI Nora

2018/2019

Ce polycopié est destiné aux étudiants inscrits en première année domaine sciences et Technologie.

Conformément au programme officiel de la matière physique 2, ce manuscrit comporte deux chapitres. Chapitre 1 : Charge ponctuelle et Dipôle électrique et Chapitre 2 : Distribution continue de charges, Théorème de Gauss

Chaque chapitre contient un rappel de cours où l'étudient trouvera toutes les formules de basse suivi par une série d'exercices soigneusement résolus afin de permettre à l'étudient d'assimiler les éléments essentielles du cours et de maitriser les connaissances qui leur sont demandés.

Dr. Lamoudi Nora

Maitre de conférences B

UBMA

Chapitre 1

Charges ponctuelles et

Dipôle électrique

I-Force électrostatique

I-1-Loi de coulomb

- Deux charges ponctuelles[1] (dimensions négligeables) exercent l'une sur l'autre deux forces opposées.

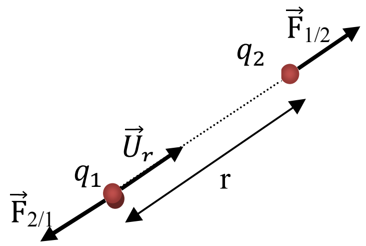


Figure.1.1: $q_1.q_2>0$
les charges se repoussent[2].

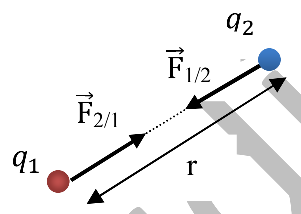


Figure.1.2: $q_1.q_2< 0$
les charges s'attirent[3]

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r$$

Avec

- $^1/_{4\pi\varepsilon_0} = K \approx 9.10^9$
- La permittivité électrique du vide[4] $\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}$
- $\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ et $r = \|\overrightarrow{AB}\|$
- Unités (S.I) : ***F*** en Newton; ***r*** en mètre,***q*** en Coulomb, ***K*** en $N.m^2.C^{-1}$et $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ en $N.m^2.C^2$.

**Remarque* : Dans un milieu autre que le vide, ε_0 sera remplacée par $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ où ε_r représente la permittivité relative.

II-2-Principe de superposition

- L'action de n charges ponctuelles q_1 q_2 q_3,…... q_n placées aux points M_1, M_2, ….M_n sur une charge q_0 placée au point M (x, y, z) est donnée par **la somme vectorielle**[5] suivante:

$$\vec{F}(M) = \sum_{i=1}^{i=n}\vec{F}_{0i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q_i}{r_{0i}^2}\vec{u}_{0i}$$

---

[1]شحنة نقطية، [2]تتنافر، [3]تتجاذب، [4]سماحة الفراغ، [5]جمع شعاعي.

II-Champ électrostatique

II-1-Champ électrostatique[1] créé par une charge ponctuelle

- Une charge ponctuelle q_1 crée dans son environnement[2] un champ électrique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\vec{u}_r$$

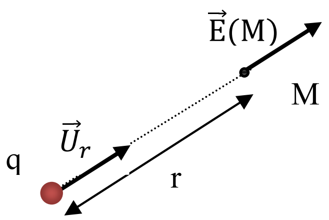


Figure.1.3 :q> 0, le champ est centrifuge[3]

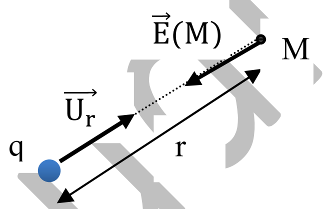


Figure.1.4 : q < 0 le champ est centripète[4]

- ➢ Unité Volt /mètre (V/m)
- Force de *Lorentz*

  Si on place une charge q en M elle subit l'action du champ $\vec{E}$(M)

$$\vec{F}(M) = q\vec{E}(M)$$

II-2-Champ électrostatique créé par n charges ponctuelles

- Le champ total créé par n charges ponctuelles q_1 q_2 q_3, ……,q_n placées aux points M_1, M_2,……, M_n en un point M (x, y, z) est donnée par **la somme vectorielle** suivante:

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{i=n}\vec{E}_{0i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_{0i}^2}\vec{u}_{0i}$$

III-Potentiel électrostatique

II-1-Potentiel électrostatique[5] créé par une charge ponctuelle

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

- ➢ Unité Volt (V)

[1]حقل كهربائي، [2]محيطها، [3]طاردة، [4]مركزية، [5]الكمون الكهربائي.

<u>Remarque</u> : le potentiel est une **fonction scalaire**

II-2-Potentiel électrostatique créé par n charges ponctuelles

- Le potentiel total est donné par **la somme algébrique**[1]

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

II-3-Relation entre potentiel et champ électrostatique

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

II-4-Surfaces équipotentielles[2]

- Sont des surfaces centrées sur la charge

$$V(M) = cte \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow \vec{E}\vec{dl} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{dl}$$

IV-Energie potentielle d'interaction

- Energie: Capacité d'un système à fournir un travail

$$\mathcal{E}_P = qV$$

- Travail: produit d'une force par le déplacement qu'elle engendre

$$W_A^B = q(V_A - V_B)$$

V-dipôle électrique[3]

- Moment dipolaire électrique[4]

$$\vec{p} = qAB\vec{\imath} = 2aq\vec{\imath}$$ (exemple : molécule H_2O)

- Potentiel à grande distance

$$V(M) = \frac{q.l\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P}.\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- Les équipotentielles

$$V = cst \ \Rightarrow r^2 = K\cos\theta$$

- Les lignes de champ

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} \Rightarrow r = K'\sin^2\theta$$

Les lignes de champ sont orthogonales[5] aux équipotentielles.

---

[1]جمع جبري، [2]السطوح المتساوية الكمون، [3]ثنائي الأقطاب، [4]عزم ثنائي الأقطاب، [5]متعامد، [6]منتظم.

-Action d'un champ extérieur uniforme[5]

- Moment électrostatique

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{P} \wedge \vec{E}_{ext}$$

- Energie potentielle électrostatique

$$\mathcal{E}_e = -\vec{P}.\vec{E}_{ext}$$

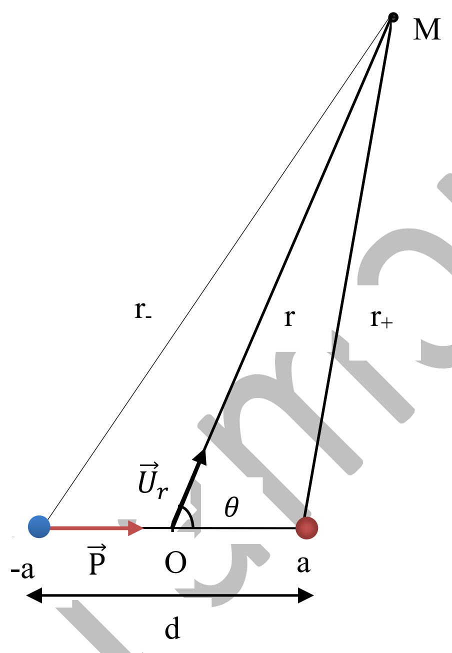


Figure.1.5 : Dipôle électrique

Exercices avec solutions

Exercice 1

1)- Calculer le rapport entre la force électrostatique[1] $\vec{F}_e$ et la force d'attraction gravitationnelle[2] $\vec{F}_g$ pour :

a) Le système électron/proton
b) Le système électron/électron
c) Le système proton / proton

2)-Que peut-on conclure ?

Données : $m_e = 9{,}1091.10^{-31}$ Kg, $M_P = 1{,}6725.10^{-27}$ Kg,
$e^- = -1{,}6.10^{-19}$C, $e^+ = +1{,}6.10^{-19}$C et $G = 6{,}6710^{-11}$ N.m²/kg.

1) Calcul du rapport F_e/F_g pour :

a) Le système électron/proton

La force électrostatique entre un électron et un proton est *attractive*

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}.$$

La force gravitationnelle entre un électron et un proton est

$$F_g = G\,\frac{m_e m_p}{r^2}.$$

Le rapport

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}}{G\,\frac{m_e m_p}{r^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{Gm_e m_p}$$

$$= 9.10^9 \times \frac{(1{,}6.10^{-19})^2}{6.67.10^{-11} \times 9{,}1091.\,10.^{-31} \times 1{,}6725.\,10^{-27}}$$

$$\boxed{\frac{F_e}{F_g} \approx 2{,}3.10^{39}},$$

valeur très élevée $F_e \gg F_g$

b) Le système électron/électron

La force électrostatique entre un électron et un électron est *répulsive*

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{Gm_e^2} \approx 41{,}63.\,10^{41},$$

$$\boxed{\frac{F_e}{F_g} \approx 41{,}63.\,10^{41}},$$

---

[1]القوة الكهربائية، [2]قوة الجدب العام.

valeur très élevée

c) Le système proton / proton

La force électrostatique entre un proton et un proton est *répulsive*

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{Gm_p^2}$$

$$\boxed{\frac{F_e}{F_g} \approx 12{,}35.10^{35}},$$

valeur très élevée.

2)- Dans les trois cas $F_e \gg F_g \Rightarrow$ la force de gravitation universelle est négligeable devant la force électrostatique.

Exercice2

Soient deux charges ponctuelles isolées placées respectivement aux points A (1, 2) et B (-1, 2)

1)- Calculer le champ électrique créé par ces charges au point O (0,0).

On place une troisième charge q_3 au point O(0,0)

2)- Déduire la force que subit q_3 puis calculer son potentiel et son énergie.

- ***Cas 1 : q_1 et q_2 sont positives***
- ***Cas 2 : q_1 positive et q_2 négative.***

<u>A.N</u> : $q_1 = q_2 = q_3 = q = 2\mu c$

- **Cas 1 :** q_1 et q_2 sont positives

1)- Calcul du champ électrique

$$\vec{E}_O = \vec{E}_{A/O} + \vec{E}_{B/O}$$

$$E_{A/o} = E_{B/o} = K\,\frac{q}{r^2}$$

Avec r = OA =OB =$\sqrt{5}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Projection suivant l'axe OX : $E_{ox} = -E_{A/o}\cos\theta + E_{B/o}\cos\theta = 0$

Projection suivant l'axe OY : $E_{oy} = -E_{A/o}\sin\theta - E_{B/o}\sin\theta = -2K\,\frac{q}{r^2}\sin\theta$

$$\vec{E}_O = 0\vec{\imath} - 2E_{A/o}\sin\theta\vec{\jmath}$$

$$\vec{E} = -2\,\frac{9.10^9 \times 2.10^{-6}}{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\jmath} = -\frac{72}{5^{3/2}}10^3\vec{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{E} \approx -6{,}45.10^3\,\vec{\jmath}\,V/m}$$

$\vec{E}$ est porté par l'axe OY.

a) Force subit par q_3.

$$\vec{F}_0 = q_3\overrightarrow{E_0} = -2.10^{-6} \times \frac{72}{5^{3/2}} 10^3\vec{j} = -2\frac{72}{5^{3/2}} 10^{-3}\vec{j}$$

$$\vec{F}_0 \approx -12{,}88.\,10^{-3}\vec{j}.N$$

b) Calcule du potentiel

$$V_0 = V_{A/0} + V_{B/0} = K\,\frac{q}{r} + K\,\frac{q}{r} = 2K\,\frac{q}{r}$$

$$V_0 = 2\,\frac{9.10^9 \times 2.10^{-6}}{\sqrt{5}} = \frac{36.\,10^3}{\sqrt{5}}V$$

$$\boxed{V_0 \approx 16{,}1.\,10^3 V}.$$

- Calcul de l'énergie

$$\mathcal{E}_P = q_3.V_0 = \frac{2.10^{-6} \times 36.\,10^3}{\sqrt{5}} = \frac{72.10^{-3}}{\sqrt{5}} joule$$

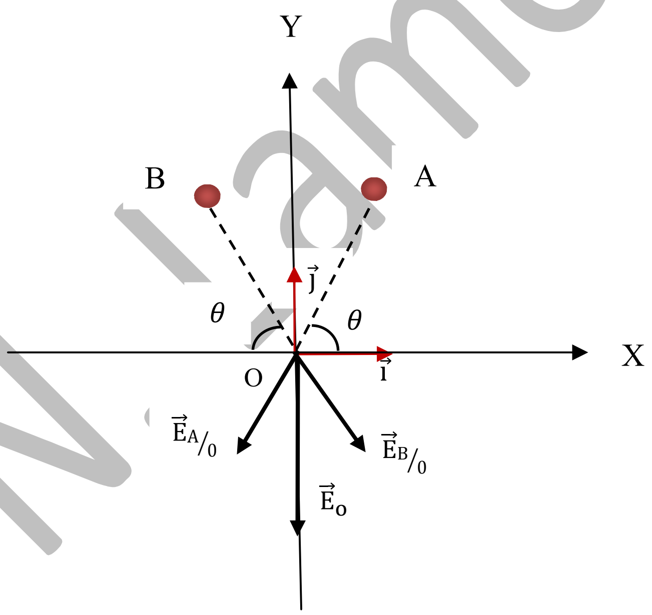


Figure.2.1 : q_1 et q_2 positives

- **Cas 2 :** q_1 positive et q_2 négative.

Projection suivant l'axe OX

$$E_{ox} = -E_{A/o}\cos\theta - E_{B/o}\cos\theta = -2K\,\frac{q}{r^2}\cos\theta$$

Projection suivant l'axe OY

$$E_{oy} = -E_{A/o}\sin\theta + E_{B/o}\sin\theta = 0$$

$$\vec{E}_O = 2E_{A/o}\cos\theta\,\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}$$

$$\vec{E} = -2\,\frac{9.10^9 \times 2.10^{-6}}{5} \times \frac{1}{5}\vec{\imath} = -\frac{36}{5^{3/2}}10^3\vec{\imath}$$

$$\boxed{\vec{E} = 3{,}22.10^3\vec{\imath}\,V/m}.$$

$\vec{E}$ est porté par l'axe OX.

$$V_0 = V_{A/0} + V_{B/0} = K\,\frac{q}{r} - K\,\frac{q}{r}$$

$$\boxed{V_0 = 0\,V}$$

- L'énergie

$$\boxed{\mathcal{E}_P = q_3V_0 = 0\,joule}.$$

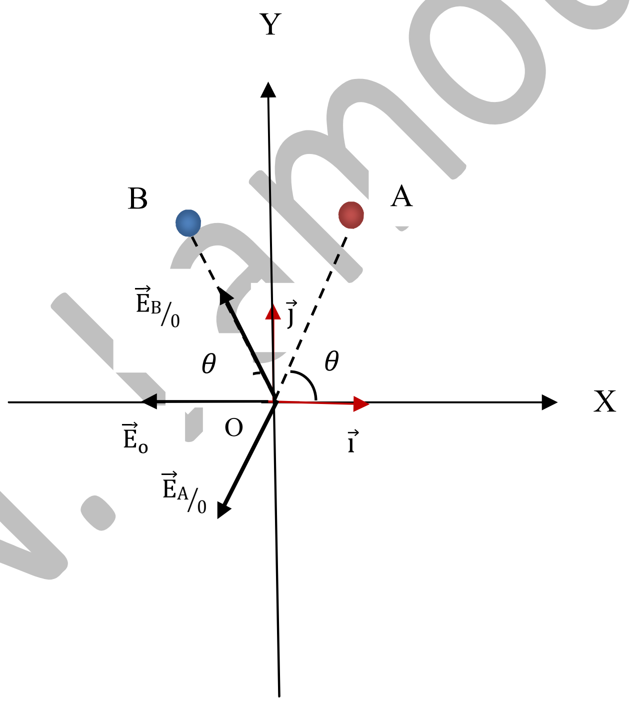


Figure.2.2. : q_1 positive et q_2 négative

Exercice 3

On place aux sommets d'un carré ABCD de côté a=1cm les charges q_A=2µC, q_B=4µC, q_C=2µC et q_D=-1µC.

1)- Calculer le module du champ $\vec{E}$ et le potentiel V au point O intersection des diagonales[1].

2)- Quelle est l'énergie potentielle Ɛ d'une charge q= 2µC placée en O.

[1] اقطار

1- Module du champ

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$$

On a : $q_A = q_C$ et$q_B = 4q_D$(en valeur absolue)

$$E_A = E_C = K\,\frac{q_A}{r^2}$$

$$E_B = 4E_D = K\,\frac{4q_D}{r^2}$$

Avec : r = OA =OB= OC =OD =$a\sqrt{2}/2$

D'où $r^2 = a^2/2$.

Pour simplifier les calculs nous choisissons les axes $\overrightarrow{OX}$ et $\overrightarrow{OY}$ confondus avec les diagonales du carré

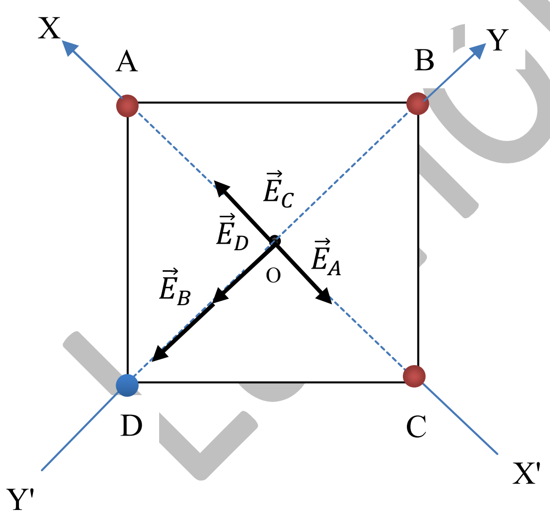


Figure.3.1.

Nous aboutissons alors,

projection suivant l'axe OX

$$E_{ox} = -E_D - E_B$$

$$\Rightarrow E_{ox} = -K\,\frac{5q_D}{r^2} = -K\,\frac{10q_D}{a^2}$$

le signe "– " veut dire que le champ $\vec{E}_{ox}$ est dans le sens des x négatifs.

projection suivant l'axe OY

$$E_{oy} = E_C - E_A = 0,$$

donc :

$$\boxed{\vec{E}_o = \vec{E}_{ox} = -K\,\frac{10q_D}{a^2}\vec{\imath}}.$$

A.N

$$\vec{E}_o = -9.10^9 \frac{10 \times 10^{-6}}{(10^{-2})^2} \vec{\imath}$$

$$\boxed{\vec{E}_o = -9.10^8 \vec{\imath}\ V/m}.$$

Potentiel au point O

$$V_o = V_A + V_B + V_C + V_D$$

$$V_o = K\frac{q_A}{OA} + K\frac{q_B}{OB} + K\frac{q_C}{OC} + K\frac{q_D}{OD}$$

$$V_o = \frac{K\sqrt{2}}{a}(q_A + q_B + q_C + q_D)$$

AN

$$V_o = \frac{9.10^9\sqrt{2}}{10^{-2}}(2 + 4 + 2 - 1)10^{-6}$$

$$\boxed{V_o = 89.10^5\ V}.$$

Energie potentielle de q=2µC

$$\mathcal{E}_p = qV_o = 89.10^5 \times 2.10^{-6}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_p = 17{,}8\ joule}.$$

Exercice 4

Deux petites boules ponctuelles identique A et B de masse m=1g et de charge q sont suspendues au point O chacune par un fil de longueur l=0.5m. A l'équilibre électrostatique la distance entre les deux charges est l.

1)- Calculer la charge q du fil à l'équilibre.

2)- Calculer le potentiel V_o au point O, le champ $E_{o'}$ et le potentiel $V_{o'}$ au point O

3)- Calculer le travail $W_{O \to O'}$ pour déplacer une charge q'=1µC de O jusqu'à O', milieu de AB.

1)- Calcul de la charge q

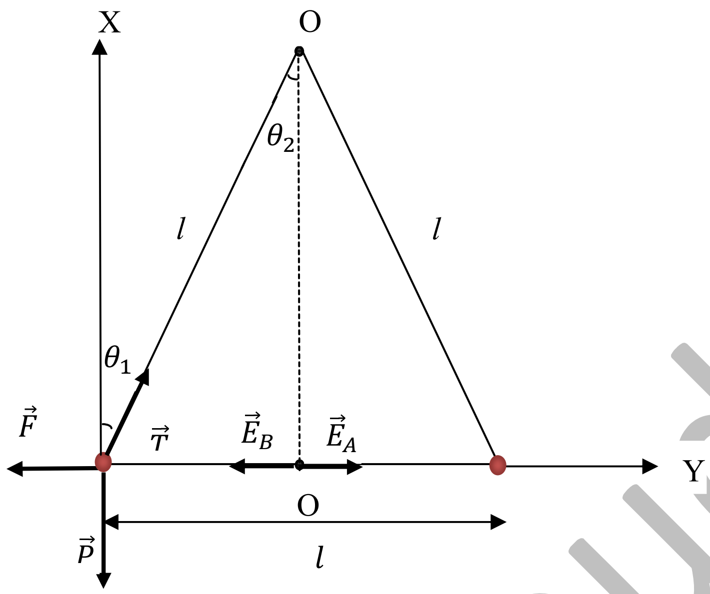
La charge q placée au point A est soumis à :

-la force électrostatique $\vec{F}$(la charge placée au point B exerce sur la charge placée au point. A une force attractive « les deux charges sont de même signe »

-La tension du fil $\vec{T}$ et le poids $\vec{P}$

A l'équilibre électrostatique

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$$



<u>Figure.</u>4.1

Le triangle est équilatéral (Fig.4.1) les angles sont égaux, donc $\theta_1 = 30°$

De plus θ_1 et θ_2 sont deux angles **alterne-internes** on a donc $\theta_1 = \theta_2 = \theta = 30°$

Projection suivant les axes

$$\begin{cases} OX: \; -F + T\sin\theta = 0 \\ \quad et \\ Oy: \; -P + T\cos\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = T\sin\theta & ① \\ \quad et \\ P = T\cos\theta & ② \end{cases}$$

$$\frac{①}{②} = \frac{F}{P} = \tan\theta \Rightarrow F = P\tan\theta$$

$$F = K\frac{q^2}{l^2} = P\tan\theta \Rightarrow \boxed{q = \left(\frac{Pl^2\tan\theta}{K}\right)^{1/2}}.$$

<u>*AN*</u>

$$q = \left(\frac{10^{-3} \times 9{,}8 \times (0.5)^2}{9.\,10^9\sqrt{3}}\right)^{1/2} = 3{,}96.10^{-7}$$

$$\boxed{q = 3{,}96.10^{-1}\mu C}.$$

- Calcul du travail $W_{O\to O'}$

$$W_{O\to O'} = q(V_o - V_{o'})$$

- Calcul du potentiel au point O

$$V_o = V_A + V_B = 2Kq/l$$

$$V_o = \frac{2 \times 9.10^9 \times 3,96.10^{-7}}{0,5} = 14,25.10^3 \ V$$

$$V_o = 14,25.10^3 \ V$$

- Calcul du potentiel au pont O'

$$V_{o'} = V'_A + V'_B = 2Kq/(l \ / \ 2) = 28,5.10^3 V$$

$$\boxed{V_{o'} = 28,5.10^3 V}.$$

Donc

$$W_{O \to O'} = 10^{-6}(14,25 - 28,5)10^3 = -14,25J$$

$\boxed{W_{O \to O'} = -14,25J}$ ⇒Le travail est résistant.

Exercice 5

Deux charges ponctuelles isolées q_1=-50 µC et q_2 = -10 µC disposées en deux points A et B distants de 10cm. Sur le segment AB, au pont C distant de 6cm de A on dispose la charge q_3=40 µC.

1)- Calculer la force électrostatique à laquelle est soumise q_3.

2)- Comment est dirigée cette force.

3)-Déterminer le point M de AB où on doit placer la charge q_3 pour qu'elle soit en équilibre sous l'interaction de q_1 et q_2.

On écarte légèrement q_3 de sa position d'équilibre (tout en la maintenant sur AB). Est-elle ramenée vers sa position d'équilibre? L'équilibre est-il stable?

1)- Calcul de la force électrostatique à laquelle est soumise q_3.

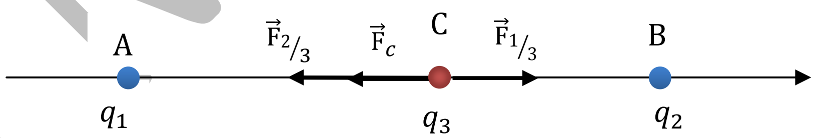


Figure.5.1

La charge q_1 exerce sur la charge q_3 une force attractive $\vec{F}_{1/3}$ de module :

$$F_{1/3} = K\frac{q_1 q_3}{(AC)^2}.$$

La charge q_2 exerce sur la charge q_3 une force attractive $\vec{F}_{2/3}$ de module :

$$F_{2/3} = K\frac{q_2 q_3}{(BC)^2}.$$

Avec $q_1, q_2\ et\ q_3$ sont en valeur absolue

La force totale que subit la charge q_3 est la somme des deux forces :

$$\vec{F_c} = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3} = \vec{0}.$$

Projection suivant l'axe

$$F_c = -F_{1/3} + F_{2/3}$$

$$F_c = -K\frac{q_1 q_3}{(AC)^2} + K\frac{q_2 q_3}{(BC)^2}$$

$$F_c = Kq_3\left(-\frac{q_1}{(AC)^2} + \frac{q_2}{(BC)^2}\right)$$

$$F_c = 9.10^9 40 \times 10^{-6}\left(-\frac{30.10^{-6}}{(6.10^{-2})^2} + \frac{60.10^{-6}}{(4.10^{-2})^2}\right)$$

$$\boxed{F_c = \times 10^{-6} N.}$$

Le point M doit être à l'intérieur de AB

A l'équilibre électrostatique

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3} = \vec{0}$$

Projection suivant l'axe

$$-F_{1/2} + F_{2/3} = 0 \Rightarrow F_{1/2} = F_{2/3}$$

$$\frac{q_1}{(AM)^2} = \frac{q_2}{(BM)^2} \Rightarrow q_1(BM)^2 = q_2(AM)^2 \Rightarrow (BM)^2 = \frac{q_2}{q_1}(AM)^2,$$

donc,

$$(BM)^2 = 2(AM)^2 \Rightarrow BM = \sqrt{2}.AM\ et\ AM = {}^{BM}/_{\sqrt{2}}$$

Nous avons une seul équation avec deux inconnus la deuxième équation est :

$$AM + BM = AB,$$

alors,

$$AM + \sqrt{2}.AM = AB \Rightarrow AM(1+\sqrt{2}) = AB \Rightarrow AM = \frac{AB}{(1+\sqrt{2})} = \frac{10cm}{2{,}414} = 4{,}14cm,$$

et

$$^{BM}/_{\sqrt{2}} + BM = AB \Rightarrow BM\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) = AB \Rightarrow BM = \frac{\sqrt{2}.AB}{(1+\sqrt{2})} = 5{,}86cm.$$

Supposons que la charge q_1 passe en M', à droite de M **(Fig.5.2)** Les forces que subit q_1 sont $\overrightarrow{F'}_{1/3}$avec $F'_{1/3} < F_{1/3}$(car AM'>AM) et $\overrightarrow{F'}_{2/3}$avec $F'_{2/3} > F_{2/3}$(car BM'<AM)

Donc la résultante de $\overrightarrow{F'}_{1/3}\ et\ \overrightarrow{F'}_{2/3}$n'est pas nul et est dirigée vers la droite **(Fig.5.2.)** la charge n'est donc pas ramenée vers M. (même chose si M' est à gauche de M), l'équilibre est donc *instable.*

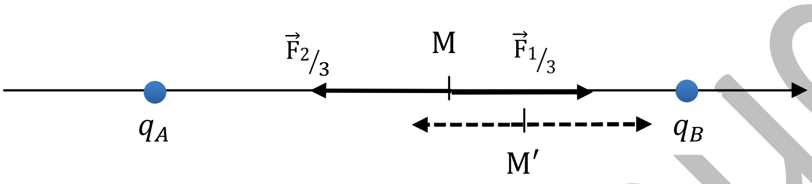


Figure.5.2

Exercice 6

Une charge q=10µC décrit un chemin rectiligne[1] de longueur 30cm, incliné de 45°sur la direction d'un champ uniforme[2] d'intensité E=50Vm-[1]
1)-Calculer le travail de la force électrostatique au cours de ce déplacement[3].

1)-Calcule du travail de la force électrostatique pour :

1[er] cas

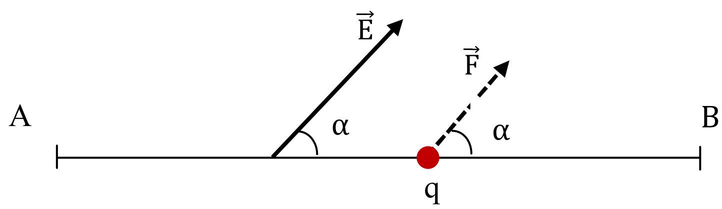


Figure.6.1

$\vec{F}$, effectue un travail positif, c'est une force motrice

$$w_1 = \vec{F}_1.\overrightarrow{AB} = qE.AB.\cos\alpha$$

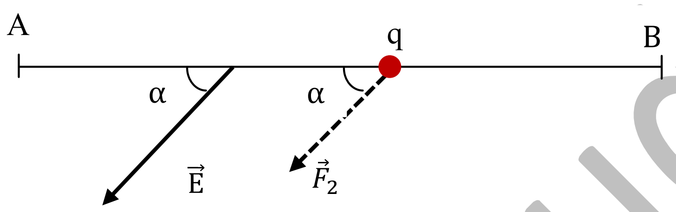
$$w_1 = 10.10^{-6} \times 50 \times 30.10^{-2}.\cos 45° = 10{,}575.10^{-5}J$$

$$\boxed{w_1 = 10{,}5710^{-5} J}$$

<u>2eme cas</u>

$\vec{F}$, effectue un travail négatif, c'est une force résistante (**Fig.6.2)**

$$w_2 = \vec{F}_2.\overrightarrow{AB} = qE.AB.\cos(\pi - \alpha)$$



<u>Figure</u>.6.2

Exercice 7

Deux charges électriques ponctuelles (+q) et (-q) positionnées aux points A et B et séparées par une petite distance constante d = AB = 2a. O étant le milieu du segment AB porté par l'axe $\overrightarrow{OX}$ dirigé de (-q) vers (+q)

1)- Calculer l'expression du potentiel $V(r,\theta)$ créé par ce dipôle en un point M défini par les coordonnées polaires[1] $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et $\theta = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM})$. On supposons que $(d \ll r)$.

2)- Calculer les composantes radiale et tangentielle E_r et E_θ du champ électrique en M et déduire son module

3)- Déterminer l'angle que le vecteur champ $\vec{E}$ électrique fait avec $\overrightarrow{OM}$.

4)- Déterminer l'équation des surfaces équipotentielles

5)- Montrer que le champ $\vec{E}$ du dipôle se met sous la forme

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3(\vec{P}.\vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{P}\right)$$

Avec $\vec{P} = qd\vec{\imath}$ est le moment dipolaire

6)- Donner le module et la direction du champ $\vec{E}$ aux pointssuivants :
θ=0, θ=π/2, θ=π et θ=3π/2 (positions principales de Gauss)

1)-Le potentiel électrostatique V créé en M par le doublet électrique est égal à la somme des potentiels créés par chaque charge prise séparément

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(+q)}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{r_2}$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}$$

On a .$d \ll r \Rightarrow r_1 + r_2 \approx 2r$ et $r_1 r_2 \approx r^2$

Or $\quad r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) \Rightarrow (r_2 - r_1) = r_2^2 - r_1^2/(r_1 + r_2),$

avec $\quad r_1^2 = \overrightarrow{AM}^2 = \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right)^2 \cong r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta,$

et $\quad r_2^2 = \overrightarrow{BM}^2 = \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}\right)^2 \cong r^2 + a^2 - 2ar\cos(\pi - \theta) = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta.$

Donc $(r_2 - r_1) = 2a\cos\theta = d\cos\theta,$

d'où : $V(M) = V(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$

Ou bien,

$$\boxed{V(M) = V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}.\vec{u}_r}{r^2}}.$$

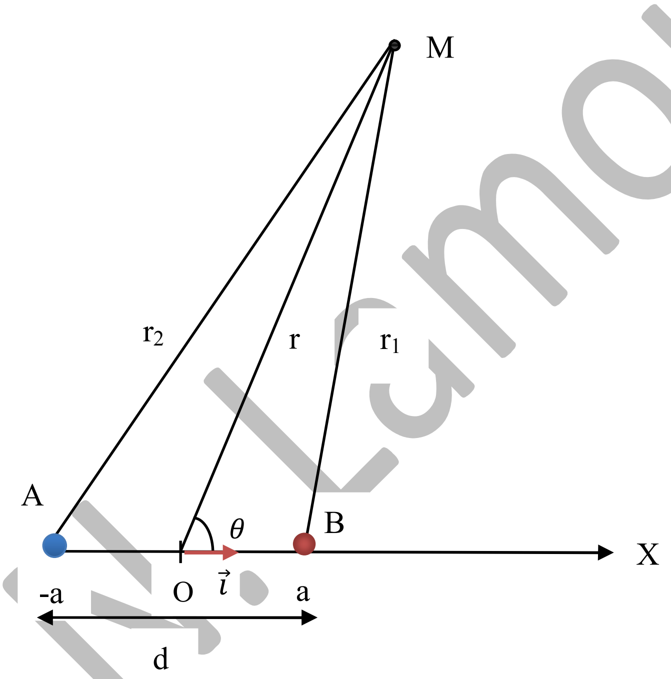


Figure.7.1

2)-Le champ électrique $\vec{E}$au point M dérive du potentiel V, soit $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$

Le vecteur champ électrostatique $\vec{E}(M) = E_r\vec{u}_r + E_\theta\vec{u}_\theta$, les composantes radiale E_r et tangentielle E_θ sont donc :

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2P\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

Le module du vecteur champ électrique est donc

$$E = \sqrt{{E_r}^2 + {E_\theta}^2},$$

soit

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P}{r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta},$$

ou

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P}{r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + \sin^2\theta}}$$

**Remarque* : Le champ électrostatique créé par un dipôle électrique est inversement proportionnel à r^3 par contre le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle est inversement proportionnel à $r.^2$

3)-Le vecteur champ$\vec{E}(M)$ fait avec $\overrightarrow{OM}$ l'angle défini par :

$$\tan\alpha = \frac{E_\theta}{E_r}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{1}{2}\tan\theta}$$

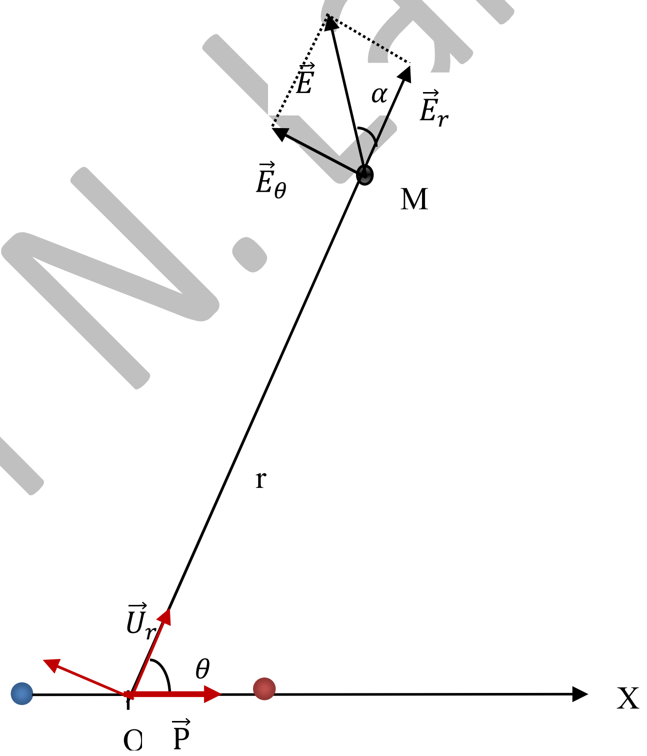


Figure.7.2

4)-Les surfaces équipotentielles sont définies par V= constante :

$$V(M) = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = cst$$

où

$$\frac{\cos\theta}{r^2} = \mathrm{K},$$

alors

$$\boxed{r = K\sqrt{\cos\theta}}$$

5)-Dans le repère polaire le champ électrostatique s'écrit

$$\vec{E} = E_r\,\vec{u}_r + E_\theta\,\vec{u}_\theta$$

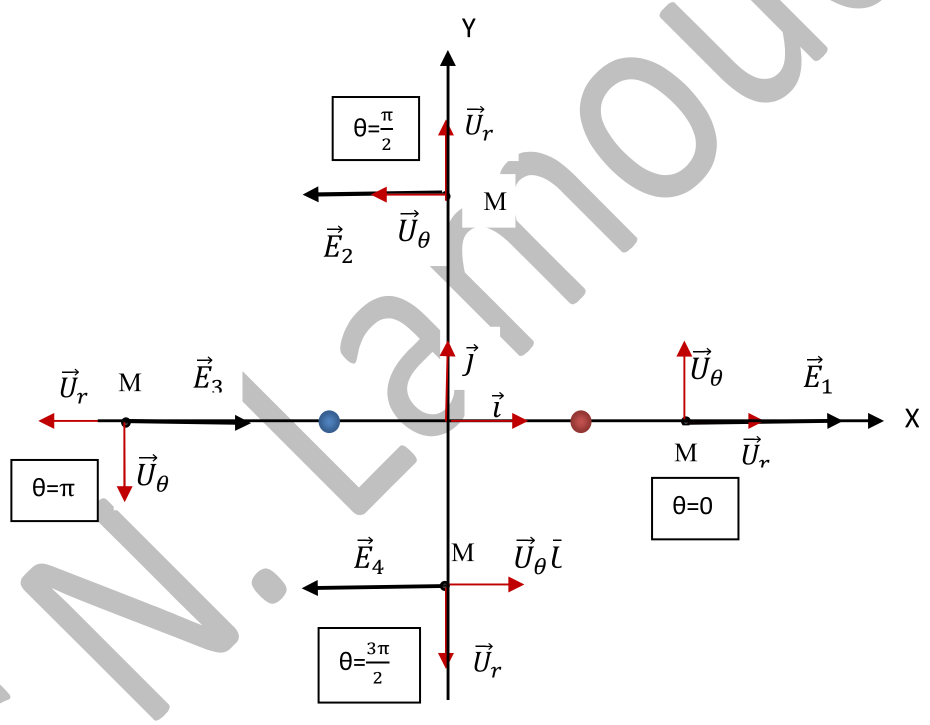


Figure.7.3

Exercice 8

On place un dipôle (+q, -q) de longueur d dans un champ uniforme $\vec{E}_1$ orienté suivant $\overrightarrow{OX}$

1)-Quelles sont les composantes du champ électrostatique $\vec{E}_T$ au point M défini par les coordonnées polaires $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et $\theta = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM})$ avec r >>d.

2)-Si V_o est le potentiel créé par le champ en O, trouver le potentiel total V en M. Déterminer les équipotentielles $V=V_o$.

3)-En supposant $\gamma = (\vec{P}, \vec{E}_1)$, $\vec{P}$ étant le moment dipolaire, étudier les conditions d'équilibre du dipôle.

1)-Le champ résultant $\vec{E}_T$ en M (r, θ) est égal à la somme géométrique du champ $\vec{E}$ crée par le dipôle en M et du champ $\vec{E}_1$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}$$

Les composantes radiale et tangentielle E_r et E_θ du champ résultant en M sont

$$\begin{cases} E_{Tr} = E_r + E_1 \cos\theta \\ \quad et \\ E_{T\theta} = E_r - E_1 \sin\theta \end{cases}$$

2)-Le potentiel dû au champ $\vec{E}_1$ en M est

$$V_1 = -\int E_1 dx = -E_1 x + cte$$

Avec

$$x = r\cos\theta,$$

d'où

$$V_1 = -E_1 r\cos\theta + cte,$$

Or au point O :

$$r = 0 \; et \; V_1 = V_o \Rightarrow cte = V_o,$$

donc

$$V_1 = -E_1 r\cos\theta + V_o,$$

le potentiel du dipôle est

$$V = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Le potentiel du champ résultant est

$$V_T = V + V_1$$

$$V_T = \cos\theta\left(\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - E_1 r\right) + V_o$$

Les surfaces équipotentielles $V_T = V_0$ sont telles que

$$V_T = \cos\theta\left(\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - E_1 r\right) = 0$$

Soit : $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$, soit le terme entre parenthèse =0 $\Rightarrow$

$$\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_1 \text{ d'où } r = \sqrt[3]{\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 E_1}} = cte.$$

La surface équipotentielle $V_T = V_0$ se compose donc

-du plan médiateur de AB $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$

-de la sphère de centre O et de rayon $r = \sqrt[3]{\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 E_1}}$

Le dipôle placé dans le champ $\vec{E}_1$ est soumis à un couple de force :

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{P} \wedge \vec{E}_1 \Rightarrow \mathcal{M} = P.E_1.\sin\gamma = qd.E_1.\sin\gamma$$

Avec $\gamma = (\vec{\mathcal{M}}, \vec{E_1})$

A l'équilibre $\mathcal{M} = 0 \Rightarrow \sin\gamma = 0$

soit $\gamma = 0$: équilibre stable

Soit $\gamma = \pi$: équilibre instable

-L'énergie électrostatique du dipôle est

$$E_P = (q)V_A + (-q)V_B = q(V_A - V_B)$$

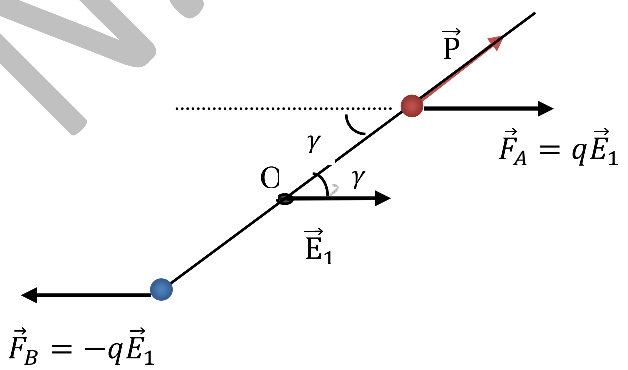
V_A étant le potentiel créé par le champ $\vec{E}_1$au point A

V_B étant le potentiel créé par le champ $\vec{E}_1$au point B

Or le potentiel créé par le champ $\vec{E}_1$ est $V_1 = -E_1\cos\gamma \times x + V_o$,

$$\left.\begin{array}{l} au\ point\ A,\ x = {}^{d}/_{2} \Rightarrow V_A = -E_1\cos\gamma \times {}^{d}/_{2} + V_o \\ au\ point\ B,\ x = {}^{-d}/_{2} \Rightarrow V_B = E_1\cos\gamma \times {}^{d}/_{2} + V_o \end{array}\right\} \Rightarrow E_P = q(V_A - V_B) = -qE_1 d\cos\gamma,$$

or $qd = P$ d'où $\boxed{E_P = q(V_A - V_B) = -PE_1\cos\gamma}$



<u>Figure</u>.8.1

Chapitre 2

Distribution continue de charges, Théorème de Gauss

I-Distribution continue de charges[1]

- Une charge q repartie de manière continue dans un corps, peut-être linéique[2], surfacique[3] volumique[4].

I-1 Distribution linéique

$dq = \lambda dl$ avec λ densité[5] linéique de charges en C/m

I-1-1-Champ électrostatique créé par une distribution linéique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}.$$

Si λ =cst = $\lambda_0$alors,

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{dl}{r^2}\vec{u}.$$

I-1-2-Potentiel électrostatique crée par une distribution linéique

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{\lambda dl}{r}.$$

Si λ =cst = λ_0 alors,

$$V(M) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{dl}{r}.$$

I-2 Distribution surfacique

$dq = \sigma dS$ avec σ densité surfacique de charges en C/m^2

I-2-1-Champ électrostatique créé par une distribution surfacique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma dS}{r^2}\vec{u}.$$

Si λ =cst = λ_0 alors,

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{dS}{r^2}\vec{u}.$$

I-2-2-Potentiel électrostatique créé par une distribution surfacique

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma dS}{r}.$$

Si σ = cst = σ_0 alors,

$$V(M) = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{dS}{r}.$$

I-3 Distribution volumique

---

[1]التوزيع المستمر للشحنات، [2]خطية، [3]سطحية، [4]حجمية، [5]كثافة.

$dq = \rho dV$ avec ρ densité volumique de charges en C/m^3

I-3-1-Champ électrostatique créé par une distribution volumique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_v \frac{\rho dv}{r^2}\vec{u}.$$

Si ρ =cst = ρ_0 alors

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_v \frac{dv}{r^2}\vec{u}.$$

I-3-2-Potentiel électrostatique créé par une distribution volumique

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_v \frac{\rho dv}{r}.$$

Si ρ =cst = ρ_0 alors

$$V(M) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_v \frac{dv}{r}.$$

II-Théorème de *Gauss*

- Le théorème de *Gauss* fournit une méthode très utile pour calculer le champ $\vec{E}$ lorsque la distribution de charges possède *des propriétés de symétrie*[1] telle qu'il est possible de choisir une surface fermée appelée dans ce cas surface de *Gauss* (S_G).

*<u>*Remarque*</u> : Le théorème de *Gauss* s' applique bien au calcul du champ lorsque la surface de *Gauss* choisie est soit sphérique[2], soit cylindrique[3]

II-1-Flux du champ

- Le flux[4] du champ $\vec{E}(M)$ créé en un point M par une distribution de charge Q à travers une surface fermée (S) est défini par

$$\Phi_S = \oiint_S \vec{E}(M)\, d\vec{S}(M),$$

avec $d\vec{S}$ vecteur surface élémentaire tel que $d\vec{S} = dS\ .\ \vec{n}$ et $\vec{n}$ vecteur unitaire perpendiculaire[5] au plan tangent[6] en M du côté de la face convexe[7]

II-2-Enoncé du théorème de *Gauss*

Le flux du champ $\vec{E}$ à travers une surface fermée créé par une distribution de charges est égal à la somme algébrique des charges présentes à l'intérieur de cette surface (S_G) divisée par ε_0

$$\Phi_S = \oiint_S \vec{E}(M)\, d\vec{S}(M) = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_0}.$$

---

[1]تناظر، [2]كروية، [3]أسطوانية، [4]التدفق، [5]عمودي، [6]مماسي، [7]محدبة.

Exercices avec solutions

A-Méthode directe

Exercice 1

Soit un fil fini AB de longueur l et de charge linéique positive uniforme[1] λ

1)- On prend un élément de longueur[2] dl d'ordonnée l, déterminer sa charge élémentaire[3] dq

2)- Ecrire le vecteur champ $d\vec{E}$ et le potentiel dV élémentaires créés par dq au point M quelconque située à la distance x du fil.

3)- Calculer le vecteur champ $\vec{E}$ et le potentiel V créés par tout le fil AB en M.

1)- On prend une longueur élémentaire dl qui porte une charge élémentaire $dq = \lambda$, cette charge crée un champ élémentaire $d\vec{E}$ au point M,.d'après la loi de coulomb

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u},$$

ici r est la distance entre dl et $d\vec{E}$

- Le potentiel élémentaire créé par la charge élémentaire dq au point M est

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r}.$$

2)- Calcul du champ

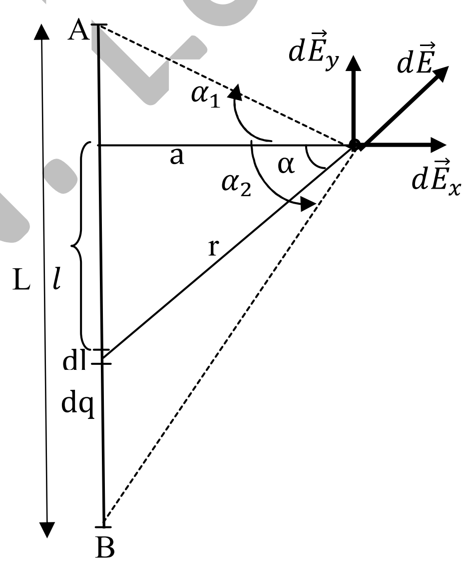


Figure.A.1.1

Projetons le vecteur $d\vec{E}$ sur les axes ox et oy (voir fig.A.1.1).

Projection / axe ox

---

[1]منتضمة، [2]طول عنصري، [3]شحنة عنصرية.

$$dE_x = dE\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}\cos\alpha\,. \qquad ①\mathbb{1}$$

Projection / axe oy

$$dE_y = dE\sin\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}\sin\alpha\,, \qquad ②\mathbb{2}$$

les composantes dE_x et dE_y sont en fonction de trois variables, à savoir dl, α et r. Exprimons les en fonction d'une seul variable, α par exemple.

On a :

$$\tan\alpha = \frac{l}{x} \Rightarrow l = x\tan\alpha,$$

donc

$$\frac{dl}{d\alpha} = \frac{x}{\cos^2\alpha} \Rightarrow dl = \frac{xd\alpha}{\cos^2\alpha} \quad ,$$

et

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow r = x\cos\alpha.$$

Remplaçons *dl* et *r* dans les expressions $\mathbb{1}$ et $\mathbb{2}$, nous obtenons

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\cos\alpha\, d\alpha,$$

et

$$dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\sin\alpha\, d\alpha.$$

- Calcul de E_x

$$E_x = \int dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\int_{-\alpha_2}^{\alpha_1}\cos\alpha\, d\alpha$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\sin\alpha\Big|_{-\alpha_2}^{\alpha_1}$$

$$\boxed{E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)}.$$

- Calcul de E_y

$$E_y = \int dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\int_{-\alpha_2}^{\alpha_1}\sin\alpha\, d\alpha$$

$$E_y = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\cos\alpha\Big|_{-\alpha_2}^{\alpha_1}$$

$$\boxed{E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}.$$

$$E = \sqrt{{E_x}^2 + {E_y}^2}$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\sqrt{(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)^2 + (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)^2}$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\sqrt{2 - 2(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - \cos\alpha_1\cos\alpha_2)}$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\sqrt{2(1 - \cos(\alpha_2 + \alpha_1))}$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\sqrt{4\sin^2\frac{(\alpha_2 + \alpha_1)}{2}}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\sin\frac{(\alpha_2 + \alpha_1)}{2}}.$$

- Calcul du potentiel

$$dV = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + l^2)^{1/2}}$$

$$V = \int dV = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{dl}{(x^2 + l^2)^{1/2}}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(l + \sqrt{x^2 + l^2}\right)\Big|_0^L$$

$$\boxed{V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(L + \sqrt{x^2 + L^2}\right) - \ln(x)}.$$

Exercice 2

Un fil fini AB de longueur l est chargé uniformément par une densité linéique positive λ.

1)- Déterminé par la méthode directe le vecteur champ $\vec{E}$ créé au point M située sur la médiatrice[1] du fil (OM=x)

2)- On met le fil AB avec un fil identique BC, de façon à construire un triangle isocèle[2] **(Voir Fig.A.2.1), c*alculer le vecteur champ $\vec{E}$ au point M située sur la médiatrice de l'angle $A\hat{B}C$ avec BH*=h**

[1]متوسطة، [2]متساوي الإضلاع.

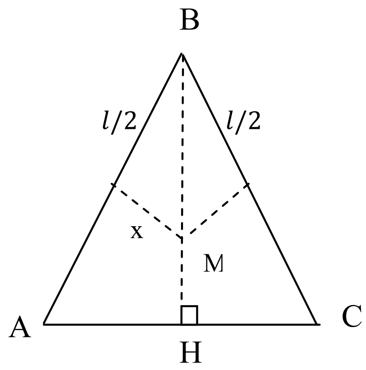


Figure.A.2.1

1)- On prend une longueur élémentaire dl qui porte une charge élémentaire dq = λ, cette charge crée un champ élémentaire $d\vec{E}$ au point M. Or le point M est située sur l'axe de symétrie du fil alors les dE_y s'annulent entre eux et les dE_x s'ajoutent (voir Fig.A.2.2), le champ $\vec{E}$ est alors porté par l'axe ox (on dit alors que "*par raison de symétrie le champ est porté par l'axe ox*").

$$dE = dE_x = dE_1 \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}\cos\alpha,$$

d'après ce qui précède on a

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\cos\alpha\, d\alpha$$

$$E = E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\sin\alpha\Big|_{-\alpha_1}^{\alpha_1}$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(\sin\alpha_1 - \sin(-\alpha_1))$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\sin\alpha_1\,\vec{\imath}},$$

avec

$$\sin\alpha_1 = \frac{l/2}{\sqrt{x^2 + l^2/4}}$$

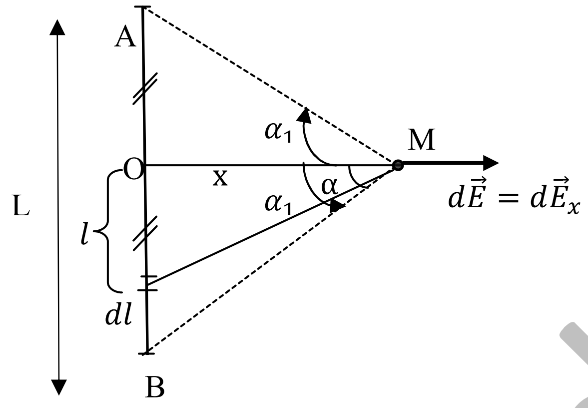


Figure.A.2.2

2)-

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1.\vec{E}_2$

$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos(\vec{E}_1.\vec{E}_2)$,

or$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_1|$

$E^2 = 2E_1^2 + 2E_1^2\cos(2\alpha)$,

on a

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$,

alors

$E^2 = 2E_1^2(1 + 2\cos^2\alpha - 1) = 4E_1^2\cos^2\alpha.$

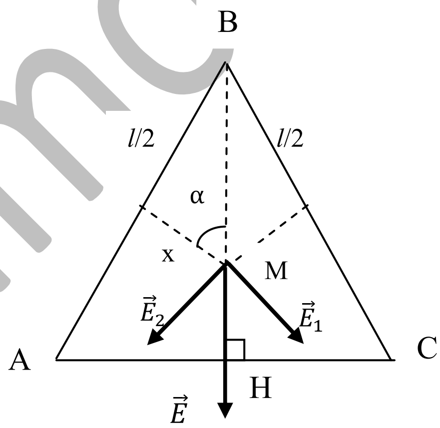


Figure.A.2.3

D'après ce qui précède

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\boxed{E_M = \frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\sin\alpha\cos\alpha},$$

comme

$$\sin\alpha = \frac{l/_2}{2/_3\,h} = \frac{3l}{4h} \;\; et \;\; \cos\alpha = \frac{3x}{2h}$$

$$E_M = \frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\frac{3l}{4h}\frac{3x}{2h}$$

$$\boxed{E_M = \frac{9\lambda l}{8\pi\varepsilon_0 h^2}}.$$

Exercice 3

Un fil, de longueur infinie, est chargé uniformément par une densité linéique positive λ.

1)- En utilisant la méthode directe, calculer le champ total du fil au point M éloigné d'une distance x du fil et déduire le potentiel V à une constante prée.

1)- La droite passant par tout point *M* extérieur à un fil infini est un axe de symétrie de ce dernier donc par *raison de symétrie* le champ total est porté par l'axe ox.

$$dE = dE_1 \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}\cos\alpha\ ,$$

en exprimant les variables *r* et *l* en fonction de la variable α, l'expression du champ devient :

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\cos\alpha\, d\alpha$$

$$E = E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\sin\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(\sin\pi/2 - \sin(-\pi/2))$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{i}}.$$

On peut déduire le potentiel par la relation

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

$$E = f(x) \Rightarrow E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow dV = -Edx$$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{dx}{x}$$

$$\boxed{V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x\, C}.$$

Exercice 4

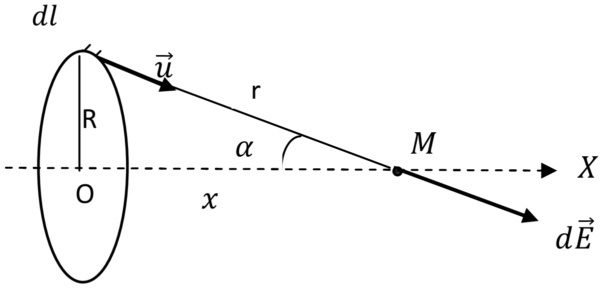
On considère un anneau uniformément chargé de centre O, de rayon R et de charge linéique λ positive.

1)- Calculer le champ $\overrightarrow{E}_{tot}$ et le potentiel V créés au point M située sur son axe OX tel que OM = x

2) -Retrouver le potentiel V en utilisant la relation entre le champ et le potentiel.

1)- Le champ créé par une charge élémentaire *dq* est

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}$$



<u>Figure</u>.A.4.1

Par *raison de symétrie* le champ électrique total est porté par ox,

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_x$$

$$E_{tot} = \int dE_x$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}\cos\alpha,$$

on a

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$E_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} dl$$

$$\boxed{E_{tot} = \frac{\lambda x R}{2\varepsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}}}.$$

- Calcul du potentiel V

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r} =$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda x}{(x^2 + R^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi R} dl$$

$$\boxed{V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0(x^2 + R^2)^{1/2}}}.$$

2)-On peut déduire le potentiel par la relation

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

$$E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow dV = -Edx$$

$$V = -\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\int \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}dx$$

$$V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}} + c$$

$$\mathrm{V}(\infty) = 0 \Rightarrow \mathrm{c} = 0 \Rightarrow \mathrm{V} = \boxed{\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}}.$$

B-Application du Théorème de *Gauss*

Exercice 1

Un fil, de longueur infinie, est chargé uniformément par une densité linéique positive λ.

1)-Par application du Théorème de Gauss calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en un point située à la distance x du fil.

1)- Prenons comme surface fermée (surface de *Gauss*), un cylindre de rayon x et d'axe le fil infini.

Par *raison de symétrie* le champ $\vec{E}$ est radial (porté par ox).

Le flux du vecteur $\vec{E}$ sortant de la surface fermé est

$\phi(\vec{E}) = \phi_{S_1}(\vec{E}) + \phi_{S_2}(\vec{E}) + \phi_{S_3}(\vec{E})$.

On tout point des deux base $\vec{S}_1$et $\vec{S}_2$

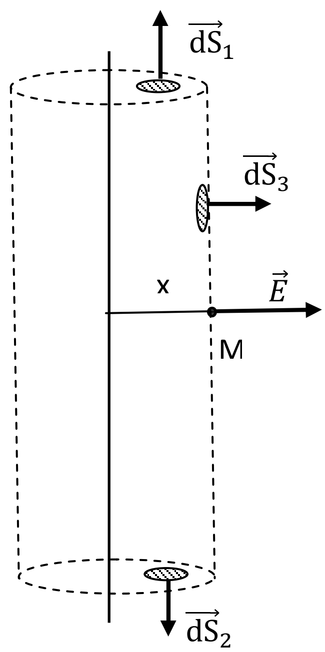
le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire à la normale donc

$\phi_{S_1}(\vec{E}) = \phi_{S_2}(\vec{E}) = 0$.

D'autre par le champ $\vec{E}$ est parallèle à la normale[1]

de la surface latérale[2] $\vec{S}_3$,

d'où



$$\phi_{S_3}(\vec{E}) = \oiint_{S_3} E\,.dS_3 = E.S_3 = E2\pi xl$$

<u>Figure</u>.B.1.1

- La charge totale contenue dans la surface de *Gauss* est.

$$Q = \int dq = \lambda\int dl = \lambda l$$

En appliquant le théorème de *Gauss* :

[1] الناظم، [2] مساحة جانبية.

$$E 2\pi x l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi x \varepsilon_0}}.$$

Exercice 2

1)- Calculer le champ électrique E_x créé en un point M à une distance x d'un plan (P_x) de densité uniforme σ($\sigma>0$).

2)- Déduire le champ E_y créé en M par un plan (P_y) perpendiculaires à (P_x) de densité uniforme 2σ se trouvant à une distance y de M.

3)- Calculer le champ E et le potentiel V résultants en ce point.

1)- Prenons comme surface de *Gauss* un cylindre d'axe perpendiculaire au plan. Par *raison de symétrie* le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire au plan *(P_x)*

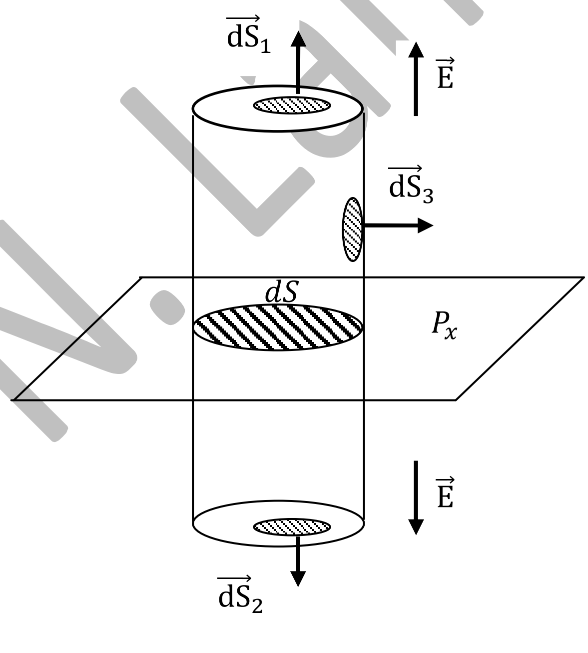
Le flux du vecteur $\vec{E}$ sortant de la surface de *Gauss* est

$$\phi(\vec{E}) = \phi_{S_1}(\vec{E}) + \phi_{S_2}(\vec{E}) + \phi_{S_3}(\vec{E}).$$

Le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire à la normale de la surface latérale $\vec{S}_3 \Rightarrow \phi_{S_3}(\vec{E}_x) = 0$.

D'autre part, on tout point des deux bases S_1et S_2 le champ $\vec{E}$ est parallèle à la normale donc

$$\phi(\vec{E}_x) = \phi_{S_1}(\vec{E}_x) + \phi_{S_2}(\vec{E}_x) = E_x S_1 + E_x S_2 = 2E_x S_1 \qquad (S_1 = S_2).$$



<u>Figure</u>.B.2.1

La charge contenue dans la surface de *Gauss* est $Q = \iint_S dq = \sigma \iint_S dS = \sigma S$ avec $S = S_1 = S_2$.

D'où en appliquant le théorème de Gauss :

$$\boxed{E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}.$$

2)- Par analogie avec la question 1, le champ $\vec{E}$ crée par le plan *(P_y)* est

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Le champ $\vec{E}$ résultant est alors

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}.$$

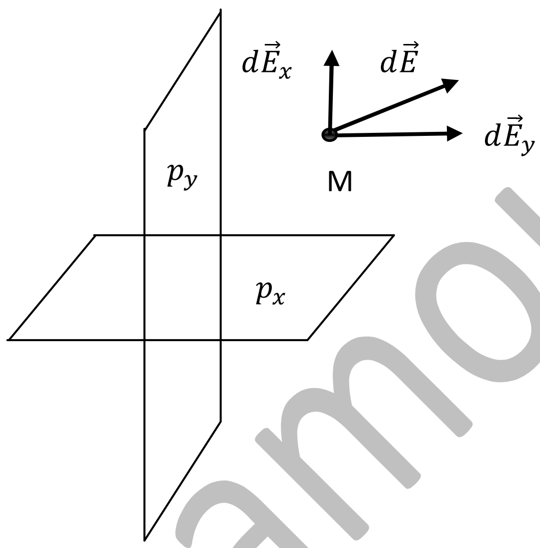


Figure.B.2.2

Exercice 3

On considère une sphère de centre O et de rayon R portant une densité de charge surfacique σ positive.

1)- Calculer la charge totale Q de la sphère.

2)- Soit le champ $\vec{E}$ constant et radial à la distance r de O, calculer son flux à travers la surface de la sphère.

3)- Ecrire le théorème de Gauss liant la charge au flux et déduire E en tout point de l'espace.

4)-.Déduire le potentiel V(r) sachant que V(r)=0 quand r tend vers l'infini.

1)- La charge totale de la sphère est $Q = \int dq = \sigma \int_S dS = \sigma S = \sigma 4\pi R^2$

2)- Prenons comme surface de Gauss une sphère de centre *O* et de rayon *r.* Comme le champ $\vec{E}$ est parallèle à la normale de la surface (le vecteur surface *dS* est perpendiculaire à la tangente de la sphère).donc le flux sortant de cette surface est

$$\phi_S(\vec{E}) = E \oiint_S dS = E.S = E4\pi r^2.$$

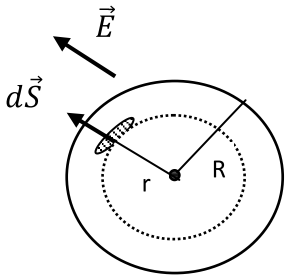
3)-Calcul du champ

❖ Cas où le point *M* est située à une distance $\underline{r < R}$

La charge totale contenue dans la surface de *Gauss* est dans ce cas est nulle

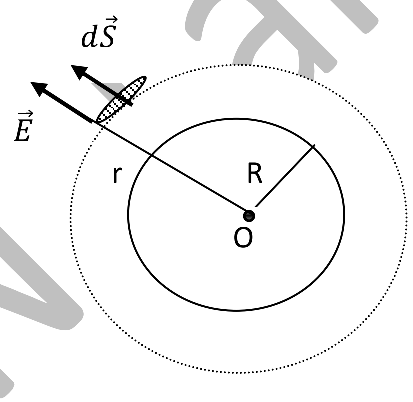
En appliquant le théorème de Gauss

$$\phi_S(\vec{E}) = E_1.S = E_1 4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_1 = 0}.$$



<u>Figure</u>.B.3.1 : *r < R*

❖ Cas où le point *M est* située à une distance $\underline{r > R}$



<u>Figure</u>.B.3.2 : *r > R*

La charge totale contenue dans la surface de *Gauss* est $Q = \sigma S = \sigma 4\pi R^2$.

En appliquant le théorème de *Gauss*

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}}.$$

4)- Calcul du potentiel

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

$$E = f(r) \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -Edr$$

❖ Cas où $\underline{r > R}$

$$V_2 = -\int \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + C,$$

on a $V \to 0$ quand $r \to \infty \Rightarrow C = 0$ d'où

$$\boxed{V_2 = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}}.$$

❖ Cas ou $\underline{r < R}$

$$V_1 = -\int 0\, dr = C'.$$

Le potentiel est une fonction continue au point $r = R \Rightarrow V_1(r = R) = V_2(r = R)$,

$$\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 R} = C' \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}}.$$

Exercice 4

Une sphère de centre O et de rayon R est chargée uniformément dans tout son volume avec une densité volumique ρ constante et positive

1)- Calculer le champ électrique en un point M(r) située à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère

2)- Déduire le potentiel V(r) sachant que V(r)=0 quand r tend vers l'infinie

1)- Calcul du champ

Par *raison de symétrie*, le vecteur $\vec{E}$ est radial est a même module en tout point d'une sphère de centre O et de rayon *r*, le flux sortant de cette sphère (surface de Gauss) est

$$\phi_S(\vec{E}) = \oiint E.dS = E.S = E4\pi r^2$$

❖ Cas où le point *M* située à l'intérieur de la sphère : $\underline{r < R}$

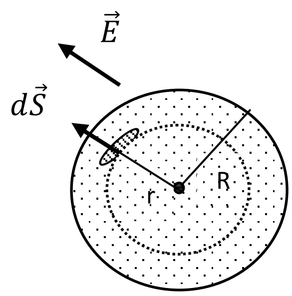


Figure.B.4.1 : $r < R$

La charge contenue dans la surface de Gauss est

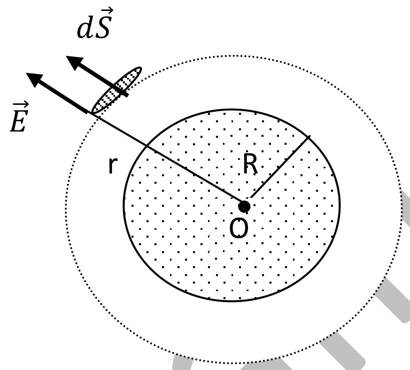
$$Q = \iiint_v \rho\, dv = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr$$

$$\boxed{Q = \frac{\rho 4\pi r^3}{3}}.$$

En appliquant le théorème de Gauss

$$\phi_S(\vec{E}) = E_1.S = E_1 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}.$$

❖ Cas où le point *M* située à l'extérieur de la sphère $\underline{r > R}$.



<u>Figure</u>.B.4.2 : <u>r > R</u>

La charge présente dans la surface de Gauss est

$$Q = \iiint_v \rho\, dv = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr$$

$$\boxed{Q = \frac{\rho 4\pi R^3}{3}}.$$

En appliquant le théorème de Gauss

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}}$$

*<u>Remarque</u>

$$Q = \frac{\rho 4\pi R^3}{3} = \rho v = Q_{Totale}\,,$$

en appliquant le théorème de Gauss

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{Q_{Totale}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{Q_{Totale}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}},$$

on retrouve la loi de Coulomb.

3)-Calcul du potentiel

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -Edr$$

- Cas où le point *M* située à une distance $\underline{r > R}$.

$$V_2 = -\int \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + C,$$

on a $V \to 0$ quand $r \to \infty \Rightarrow \mathrm{C} = 0$, d'où

$$\boxed{\mathrm{V}_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 \mathrm{r}}}.$$

- Cas ou le point *M* située à une distance$\underline{r < R}$.

$$V_1 = -\int \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C',$$

or le potentiel est une fonction continue au point $r = R \Rightarrow V_1(r = R) = V_2(r = R)$

alors,

$$\mathrm{V}_2 = \frac{\rho \mathrm{R}^2}{3\varepsilon_0} = -\frac{\rho \mathrm{R}^2}{6\varepsilon_0} + C'$$

$$C' = \frac{\rho \mathrm{R}^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho \mathrm{R}^2}{6\varepsilon_0} = \frac{\rho \mathrm{R}^2}{2\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\mathrm{V}_1 = -\frac{\rho \mathrm{r}^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho \mathrm{R}^2}{2\varepsilon_0}}.$$

Exercice5

Une sphère de centre O et de rayon R est chargée uniformément dans tout son volume, la densité volumique de charge est inversement proportionnelle[1] à la distance r de son centre o tel que $\boldsymbol{\rho = \rho_0 \frac{1}{r}}$ avec $\boldsymbol{\rho_0}$ une constante positive.

1)- Calculer la charge totale Q de la sphère.

2)- Calculer le champ électrique en un point M(r) de l'espace

3)- déduire le potentiel V(r) sachant que V(r)=0 quand r tend vers l'infinie.

1)- La charge totale de la sphère est :

$$dq = \rho dv = \rho_0 \frac{1}{r} 4\pi r^2 dr = \rho_0 4\pi r dr$$

[1] متعاكسة طردا

$$Q_{Totale} = \int dq = \rho_0 4\pi \int_0^R r dr = \left. \frac{\rho_0 4\pi r^2}{2} \right|_0^R = \rho_0 2\pi R^2$$

$$\boxed{Q_{Totale} = \rho_0 2\pi R^2}.$$

2)-

❖ Cas oط le point *M* située à une distance $\underline{r < R}$.

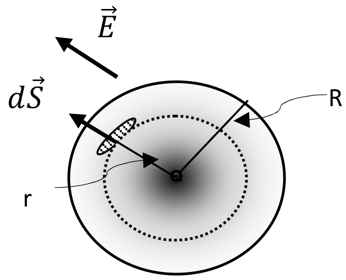


Figure.B.5.1 : $r < R$

Choisissons la surface de Gauss une sphère de centre O et de rayon *r*. Comme le champ $\vec{E}$ est parallèle à la normale de la surface alors, le flux sortant de cette surface est

$$\phi_S(\vec{E}) = \oiint_S E.dS = E.S = E 4\pi r^2.$$

La charge contenue dans la surface de Gauss est

$$Q = \int dq = \rho_0 4\pi \int_0^r r dr = \left. \frac{\rho_0 4\pi r^2}{2} \right|_0^r = \rho_0 2\pi r^2,$$

en appliquant le théorème de Gauss

$$\phi_S(\vec{E_1}) = E_1.S = E_1 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 2\pi r^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}}.$$

❖ Cas où le point *M* située à une distance $\underline{r > R}$

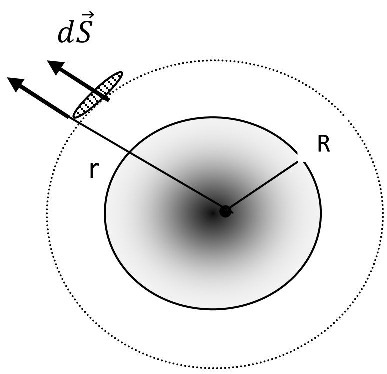


Figure.B.5.2 : $r > R$

La charge contenue dans la surface de *Gauss* est $Q = Q_{Totale} = \rho_0 2\pi R^2$,

en appliquant le théorème de *Gauss*

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 2\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r^2}}.$$

3)- Calcul du potentiel

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -Edr$$

- Cas ou le point *M* située à une distance $\underline{r > R}$.

$$V_2 = -\int Edr = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}dr = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r} + C,$$

comme $V \to 0$ quand $r \to \infty \Rightarrow C = 0$ alors,

$$\boxed{V_2 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r}}.$$

- Cas où le point M située à une distance $\underline{r < R}$.

$$V_1 = -\int \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}dr = -\frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} + C',$$

comme le potentiel est continue au point $r = R$, on a donc $V_1(r = R) = V_2(r = R)$,

d'où

$$V_2 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 R} = V_1 = -\frac{\rho_0 R}{2\varepsilon_0} + C' \Rightarrow C' = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{V_1 = -\frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}}.$$

Exercice 6

Un cylindre de hauteur h infinie et de rayon R porte une densité de charge surfacique σ positive.

1)- Calculer le champ en tout point M(r) (noter chaque région) de l'espace.

2)- Calculer les champs en tout point de l'espace pour le cas d'un cylindre de hauteur h infinie portant une densité de charge volumique uniforme et positive ρ.

1)- Prenons comme surface fermée, un cylindre de longueur infinie, de rayon *r* et de même axe que le cylindre portant la charge.

Par *raison de symétrie* le champ $\vec{E}$ est radial et a le même module en tout point de la surface fermé (surface de *Gauss*).

Le flux du vecteur $\vec{E}$ sortant de la surface fermé est,

$$\phi(\vec{E}) = \phi_{S_1}(\vec{E}) + \phi_{S_2}(\vec{E}) + \phi_{S_3}(\vec{E}).$$

En tout point des deux base S_1et S_2 le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire à la normale donc

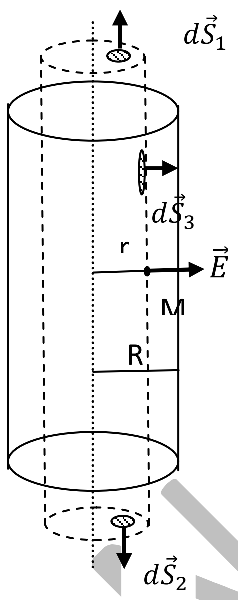
$$\phi_{S_1}(\vec{E}) = \phi_{S_2}(\vec{E}) = 0$$

D'autre par le champ $\vec{E}$ est parallèle à la normale de la surface latérale $\vec{S}_3$, d'où

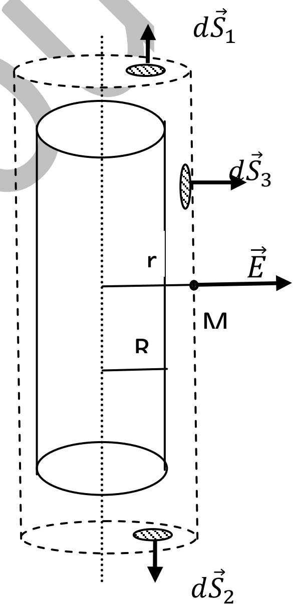
$$\phi_{S_3}(\vec{E}) = \oiint E\,.dS_3 = E.S_3 = E2\pi rh$$

❖ Cas où $\underline{r < R}$

La charge présente dans la surface de *Gauss* est $Q = 0 \Rightarrow \boxed{E_1 = 0}$.



<u>Figure</u>.B.6.1: $r < R$



<u>Figure</u>.B.6.2 : *r>R*

❖ Cas ou $\underline{r > R}$

La charge totale contenue dans la surface de *Gauss* est

$$\boxed{Q_{Totale} = \sigma 2\pi Rh}.$$

l'application du théorème de *Gauss* donne

$$E_2 2\pi rh = \frac{\sigma 2\pi Rh}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\sigma R}{r\varepsilon_0}}.$$

2)- Suivons la même manière que la partie1

❖ Cas où $\underline{r < R}$

La charge contenue dans la surface de *Gauss* est

$$Q = \iiint_v \rho\, dv = \int_{\mathbf{0}}^{r} \rho 2\pi h r dr = \rho\pi \mathrm{h} r^2|_0^r = \rho\pi \mathrm{h} r^2$$

Appliquons le théorème de *Gauss* :

$$E_1 2\pi r h = \frac{\rho\pi \mathrm{h} r^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{\rho \mathrm{r}}{2\varepsilon_0}}.$$

❖ Cas ou $\underline{r > R}$

La charge totale contenue dans la surface de *Gauss* est

$$Q_{Totale} = \iiint_{\mathbf{0}}^{v} \rho\, dv = \int_{\mathbf{0}}^{R} \rho 2\pi h r dr = \rho\pi h r^2|_0^R ,$$

d'où

$$\boxed{Q_{Totale} = \rho\pi h R^2}.$$

Appliquons le théorème de *Gauss,*

$$E_2 2\pi r h = \frac{\rho\pi h R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\rho R^2}{2r\varepsilon_0}}.$$

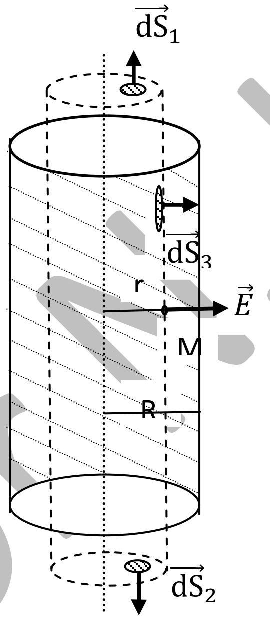


Figure.B.6.3 : *r<R*

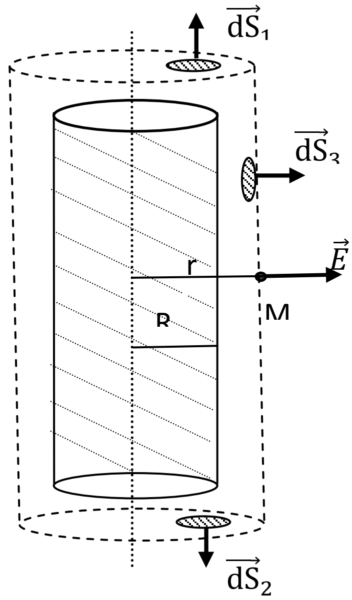


Figure.B.6.4 : *r>R*

Exercice 7

Un fil, de longueur infinie, est chargé uniformément par une densité linéique positive λ est entouré par un cylindre de hauteur infinie et de rayon R portant une densité surfacique $\sigma > \mathbf{0}$.

1)- Calculer le champ en tout point M(r) de l'espace créé par l'ensemble fil+cylindre

2)-Déduire le potentiel en tout point M(r) de l'espace sachant que V(r) = 0 à la surface du cylindre (r=R).

1)-.Prenons comme surface fermée, un cylindre d'axe le fil infini de rayon *r*. Par *raison de symétrie* le champ $\vec{E}$ est radial (porté par ox).

Le flux du vecteur $\vec{E}$ sortant de la surface fermée est

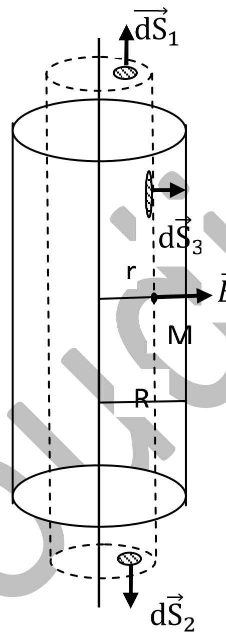
$\phi(\vec{E}) = \phi_{S_1}(\vec{E}) + \phi_{S_2}(\vec{E}) + \phi_{S_3}(\vec{E})$.

En tout point des deux bases S_1et S_2 le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire à la normale donc

$\phi_{S_1}(\vec{E}) = \phi_{S_2}(\vec{E}) = 0$.

Comme le champ $\vec{E}$ est parallèle à la normale de la surface latérale $\vec{S}_3$, alors

$$\phi_{S_3}(\vec{E}) = \oiint_{S_3} E\,.dS_3 = E.S_3 = E2\pi rl$$



<u>Figure</u>.B.7.1 : r<R

❖ Cas où <u>r<R</u>

La charge contenue dans la surface de *Gauss* est $= \lambda l$,

en appliquant le théorème de Gauss :

$E_1 2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}}$.

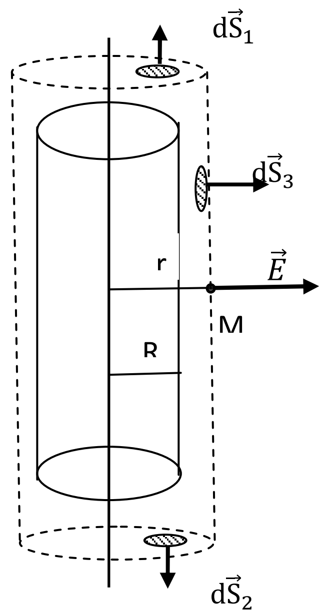
❖ Cas où $\underline{r > R}$

La charge totale contenue dans la surface de *Gauss* est

$Q = \sigma 2\pi Rl + \lambda l$ (le fil et le cylindre ont même longueur),

d'où en appliquant le théorème de Gauss :

$E_2 2\pi rl = \frac{\sigma 2\pi Rl}{\varepsilon_0} + \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{1}{r}\left(\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\right)}$.



<u>Figure</u>.B.7.2 :r>R

2- Calcul du potentiel

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -Edr$$

❖ Cas où le point *M* située à une distance $\underline{r < R}$

$$V_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}lnr + C,$$

on a $V = 0$ au point *r=R*

d'où

$$0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}lnR + C \Rightarrow C = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}lnR$$

$$\boxed{\mathrm{V}_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}ln\frac{R}{r}}.$$

❖ Cas ou le point *M* située à une distance $r > R$

$$\mathrm{V}_2 = -\int \mathrm{E}_2 dr = -\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\right)\int\frac{dr}{r} = -\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\right)lnr + C',$$

comme $V = 0$ au point *r=R*⇒

$$\mathrm{C}' = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\right)lnR,$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{V}_2 = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\right)ln\frac{R}{r}}.$$

1-P.Grécias, J-PMigeon *; Exercice et Problèmes de physique*, *Electricité* ; Collection des sciences physique 2eme édition (2009)

2-M-N.Sanz, D Chardon, F. Vandenbrouck, B. Salamito, *Physique tout-en PC, PC** : *cours et exercice corrigés*; Dunod, Paris (2014).

3-K-THABET, *Electrostatique* cours sur site Ecole Nationale Polytechnique de Constantine (ENPC) (2016/2017)

4-M.Alonso, E.J.Fin,;*Physique générale 2 champs et ondes cours et exercice corrigés* ; Dunod, Paris (2001).