Université Badji Mokhtar Annaba
Faculté sciences de l'ingéniorat
Département d'électronique

TD2 CODAGE ET COMPRESSION
S2 MASTER TELECOM

Exercice 1 : condition de décodage

Soit un code sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$ tel que
$C = \{x_1 = (0, 0, 0, 0),\ x_2 = (1, 0, 1, 1),\ x_3 = (0, 1, 0, 1),\ x_4 = (1, 1, 1, 0)\}$.

1) Quelle est la longueur du code ?
2) Quelle est la distance minimale du code ?
3) Ce code C vérifie-t-il la condition de décodage d'ordre e, pour $e = 1$?

Exercice 2 : code correcteur non binaire

Soit un code sur l'alphabet $A = \{0, 1, 2\}$ tel que
$C = \{x_1 = (0, 0, 0, 0),\ x_2 = (1, 2, 1, 2), x_3 = (2, 0, 1, 1),$
$x_4 = (0, 1, 2, 1)\}$.

1) Quelle est la distance minimale du code ?
2) Quelle est la capacité de correction de ce code ?
3) Le code C est-il parfait ?

Exercice 3 : code parfait

Soit un code sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$ tel que
$C = \{x_1 = (0, 0, 0),\ x_2 = (1, 1, 1)\}$.

1) Quelle est la capacité de correction de ce code ?
2) Le code C est-il parfait ?

Exercice 4 : distance de Hamming

Montrer que la distance de Hamming est bien une distance, c'est à dire qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

Soit A un alphabet, $\forall x, y, z \in A^n$

i) $d(x,y) \in \mathbb{R}^+$;

ii) $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$;

iii) $d(x,y) = d(y,x)$;

iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Exercice 5 : code linéaire

Soit le code C sur $\mathbb{F}_2$ tel que
$C = \{x_1 = (1,1,0,0), x_2 = (1,1,1,0), x_3 = (1,0,1,0)\}$.

1) Ce code est -il linéaire ? Pourquoi ?

2) S'il n'est pas linéaire, comment le transformer en un code linéaire ?

Exercice 6 code linéaire description par une matrice génératrice

Soit un code linéaire sur $\mathbb{F}_2$ dont la matrice génératrice est :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Mettre la matrice G sous forme normalisée.

1) Quelles sont la longueur et la dimension de ce code ?

2) Quel est le nombre de mots du code ?

3) Exhiber tous les mots du code.

4) Quelle est la capacité de correction du code ?

5) Donner la matrice de contrôle du code.

Exercice 7 code linéaire description par une matrice de contrôle

Soit le code de Hamming étendu dont la matrice de contrôle est

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Mettre la matrice H sous forme normalisée.

2) Quelles sont la longueur et la dimension de ce code ?

3) Quelle est la distance minimale du code ?

4) Donner la matrice génératrice du code.

5) Soit les mots reçus $y_1 = (1,1,1,0,0,0,0,1)$ et $y_2 = (0,1,1,1,1,1,0,0)$, sous l'hypothèse d'une seule erreur commise au plus , décoder $y_1$et y_2.

6) Donner les paramètres et la matrice génératrice de l'orthogonal du code.

Exercice 8 Codes Simplexes

Un code Simplexe sur $\mathbb{F}_2$ est un code de longueur $2^m - 1$ admettant pour matrice génératrice une matrice $(m \times 2^m - 1)$ dont les colonnes sont tous les m-uplets non nuls de $\mathbb{F}_2$.

Pour $m = 3$:

1) Donner une matrice génératrice. Quelle est la dimension du code ?

2) Exhiber tous les mots du code. Que remarque-t-on ?

3) Donner la distance minimale et la capacité de correction du code.

4) Quels sont les paramètres du code dual du code Simplexe ?

5) Exhiber tous les mots du code dual du code Simplexe.

6) Pour $m \in \mathbb{N}$ quelconque, montrer que le dual d'un code Simplexe est un code de Hamming.

Exercice 9 Codes de Hamming

Un code de Hamming sur $\mathbb{F}_2$ est un code de longueur $2^m - 1$ admettant pour matrice de contrôle une matrice dont les $2^m - 1$ colonnes sont tous les m-uplets non nuls de $\mathbb{F}_2$

1) Montrer que la dimension du code est $2^m - 1 - m$.

3) Montrer que la capacité de correction est 1.

Exercice 10 **: poids**

Soit K un corps fini, Demontrer que le poids vérifie les propriétés suivantes :

$\forall x, y \in K^n$ et $\forall \lambda \in K$

i) $d(x, y) = w(x - y)$;

ii) $w(x) = d(x, 0)^1$;

iii) $w(x) = 0$ si et seulement si $x = (0)$;

iv) $w(\lambda\, x) = w(x)$ si $\lambda \neq 0$;

v) $w(x, y) \leq w(x) + w(y)$.

Exercice 11

Soit C un code cyclique de longueur 15 sur $\mathbb{F}_2$ de polynôme générateur $g(x) = x^4 + x + 1$.

1) Quelle est la dimension du code ?

2) Quel est le polynôme générateur de l'orthogonal du code C ?

3) Ecrire la matrice de contrôle du code C.

4) Quelle est la distance minimale du code C ?