Université Badji Mokhtar, Annaba
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019-2020

Spécialité Actuariat-Assurance Vie
Série 3 et corrigé

Exercice 1

On cosidère des groupes disparaissant au premier décés, constitués de têtes âgées d'au moins 30 ans, et dont la loi de mortalité est ajustée par une formule de Makeham où $c = 1,09817$.

1) si $x - y = 15$ ans, quelle quantité faut-il- ajouter à y pour obtenir l'âge moyen du groupe (x, y)?

2) quel est l'âge moyen du groupe: $(x = 40; y = 46; z = 52)$?

Réponse:

1. D'aprés la formule de Makeham pour deux têtes, on a:

$2c^{\xi} = c^x + c^y \Leftrightarrow 2c^{\xi - y} = c^{x-y} + 1 \Leftrightarrow \xi - y = \dfrac{\ln\left[\dfrac{(c^{15}+1)}{2}\right]}{\ln(c)} = 9,942 \approx 9$ ans.

2. D'aprés la formule de Makeham pour trois têtes, on a:

$3c^{\xi} = c^x + c^y + c^z \Leftrightarrow 3c^{\xi-40} = 1 + c^6 + c^{12} \Rightarrow \xi - 40 = 7,095 \Rightarrow \xi = 47$ ans.

Exercice 2

Au-delà de 30 ans une table est ajustée par une formule de Makeham pour le quelle $c = 1,1243$.On considère 2 têtes d'âges x et y supérieurs à 30 ans dont la mortalité resulte de cette table.

a)

1) Si $x \geq y$ et si ξ désigne l'âge moyen du groupe(x, y), donner l'expression de la différence $\xi - y$ en fonction de $(x - y)$. Application :$x - y = 12$.

2) Quel est l'âge moyen du groupe $(42, 48, 56)$?

b) Faire la même chose pour le modèle de Gompertz. Commenter

Réponse:

a) On utlilise la formule de Makeham:

$$nc^{\xi} = c^{x_1} + c^{x_2} + c^{x_3} + ... + c^{x_n}$$

1. On a pour deux têtes : $2c^{\xi} = c^x + c^y \Leftrightarrow 2c^{\xi-y} = c^{x-y} + 1 \Leftrightarrow \xi - y = \dfrac{\ln\left[\dfrac{(c^{x-y}+1)}{2}\right]}{\ln(c)} = 7,955 \approx 7$ ans.

2. D'aprés la formule de Makeham pour trois têtes, on a:

$3c^{\xi} = c^x + c^y + c^z \Leftrightarrow 3c^{\xi-42} = 1 + c^4 + c^{14} \Rightarrow \xi - 42 = 8,557 \Rightarrow \xi_M = 50,557 \approx 50$ans.

b) On utlilise la formule de Gompertz:

$$c^{\xi} = c^{x_1} + c^{x_2} + c^{x_3} + ... + c^{x_n}$$

1) On a pour deux têtes : $\xi - y = 13,871 \approx 13$ ans.

2) On a pour trois têtes : $\xi_G = 59,934 \approx 59$ ans.

Commentaire: On peut constater que le modèle de makeham est plus probale que le modèle de Gompertz car $\xi_G = 59$ ans$\notin [42, 48, 56]$, et $\xi_M = 50$ ans$\in [42, 48, 56]$.

Exercice 3

Soit T_x et T_y les durées de viede deux têtes (x) et (y). On considère la variable aléatoire:

$$T = \begin{cases} 0 & \text{si } T_x \leq T_y \\ T_x - T_y & \text{si } T_x > T_y \end{cases}$$

Exprimer l'espérence mathématique de T comme la différence de 2 espérances de vie d'une tête ou d'un groupe disparaissant 1er décés.

Si y=x et si la loi de survie commune aux 2têtes peut être ajustée par une loi de Gompertz, telle que $c = 1,09$, monter que:

$$E(T) = \mathring{e}_x - \mathring{e}_{x+8}.$$

Réponse:

On a :

$$T_{xy} = \begin{cases} T_x & \text{si } T_x < T_y \\ T_y & \text{si } T_y < T_x \end{cases}$$

d'où $T = T_x - T_{xy}$ et $E(T) = \mathring{e}_x - \mathring{e}_{xy}$, si $x = y$ et si on fait l'hypothèse de Gompertz $\mathring{e}_{xy} = \mathring{e}_x$ avec $c^\xi = 2c^\xi$.

Ainsi, $\xi = x + \frac{\ln 2}{\ln c} = x + 8,04 \approx x + 8$

Pr.Zeghdoudi Halim