Chapitre 3 : Stabilité des Systèmes Linéaires

I. Conditions de stabilité des Systèmes linéaires

1.1. Domaine temporel

Un système est stable si lorsqu'il est excité par une impulsion de Dirac, sa sortie revient à sa position initiale au bout d'un certain temps.

Un système est stable ssi une entrée finie (bornée) implique une sortie finie.

1.2. Domaine fréquentiel

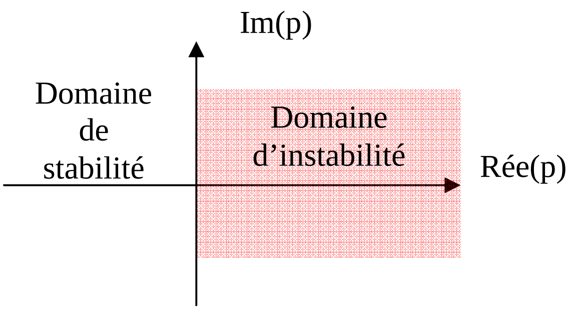
➔ Un système asservi linéaire est stable si les parties réelles des pôles (solution de D(p) = 0) sont négatives. c.à.d. tous les **pôles de sa fonction de transfert** sont strictement à gauche de l'axe imaginaire dans le plan complexe dédié à *p*.

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad avec \quad n \geq m$$

Equation caractéristique :

$$D(p) = 0$$

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 = 0$$



Exemples :

a.

$$H(p) = \frac{p-2}{(p+1)(p+2)}$$

$zéro : z1 = 2$ — le système est stable

$poles : p1 = -1$

$p2 = -2$

b.

$$H(p) = \frac{p-2}{(p+1)(p^2+2)}$$

$zéro : z1 = 2$

$poles : p1 = -1$ — le système est juste oscillant (marginalement stable)

$p2 = j\sqrt{2}$

$p2 = -j\sqrt{2}$

c.

$$H(p)=\frac{p+2}{(p-1)(p+2)}$$

$zéro: z1=-2$ le système est instable

$poles: p1=1$

$p2=-2$

Remarque :

Cette condition nécessaire et suffisante nécessite un calcul des racines ce qui rend les calculs plus lourds lorsque l'ordre du système est élevé.

II. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Soit $H(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}$ la fonction de transfert d'un système

Les pôles de $H(p)$ sont les racines de l'équation $D(p) = 0$.

On écrit D(p) sous la forme suivante $D(p)=a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0$

Table de Routh

Les deux premières lignes du tableau sont écrites à l'aide des coefficients de $D(p)$.

Les autres lignes sont formées de termes calculés à partir de ces coefficients.

Ligne1	$\mathbf{a_n}$	$\mathbf{a_{n-2}}$	$\mathbf{a_{n-4}}$	**……………**	$\mathbf{a_0}$
Ligne2	$\mathbf{a_{n-1}}$	$\mathbf{a_{n-3}}$	$\mathbf{a_{n-5}}$	**……………**	$\mathbf{a_1}$
Ligne3	b_1	b_2	b_3	……………	b_n
Ligne3	c_1	c_2	c_3		c_1
…					
Ligne(n+1)	q_1	q_2	q_3	……………	q_n

$$b_1=\frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_n a_{n-3}}{a_{n-1}};\quad b_2=\frac{a_{n-1}a_{n-4}-a_n a_{n-5}}{a_{n-1}};\quad b_3=\frac{a_{n-1}a_{n-6}-a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_1=\frac{b_1 a_{n-3}-a_{n-1}b_2}{b_1};\quad c_2=\frac{b_1 a_{n-5}-a_{n-1}b_2}{b_1};$$

…

La condition nécessaire de stabilité exprimée par le tableau de Routh est la suivante :

- Tous les termes « a_i » existent et sont de même signe (>0).
- Tous les éléments de la 1ère colonne du tableau de Routh doivent être strictement positifs.

Remarques

- le nombre de changement de signe dans la 1ère colonne du tableau de Routh est égal au nombre des racines (des pôles) de D (p) à partie réelle positive.
- Si le système est d'ordre n, on a (n+1) cœfficients sur la 1ère colonne du tableau de Routh.
- Si l'un des éléments de la 1ère colonne est égale à zéro, le système est asymptotiquement ou marginalement stable.

Exercice 1

1. $H_1(p) = \dfrac{1}{p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 3p + 3}$

2. $H_2(p) = \dfrac{p^2 + 1}{p^3 + ap^2 + bp + c}$

3. $H_3(p) = \dfrac{1}{p^2 + ap + p}$

Etudier la stabilité des systèmes par le critère de Routh en fonction de a, b et c.

Correction

1. $D(p) = p^4 + \underline{3}p^3 + \underline{4}p^2 + \underline{3}p + \underline{3} = 0$

p^4	1	4	3
p^3	3	3	0
p^2	3	3	
p^1	0	0	
p^0	0	0	

➔ le système est marginalement stable (juste oscillant).

2. $H_2(p) = \dfrac{p^2 + 1}{p^3 + ap^2 + bp + c}$

$D(p) = p^3 + ap^2 + bp + c$

p^3	1	b
p^2	a	c
p^1	$\dfrac{ab - c}{a}$	0
p^0	c	

Le système est stable si tous les éléments de la 1ère colonne >0 ➔a>0, c>0, ab-c>0

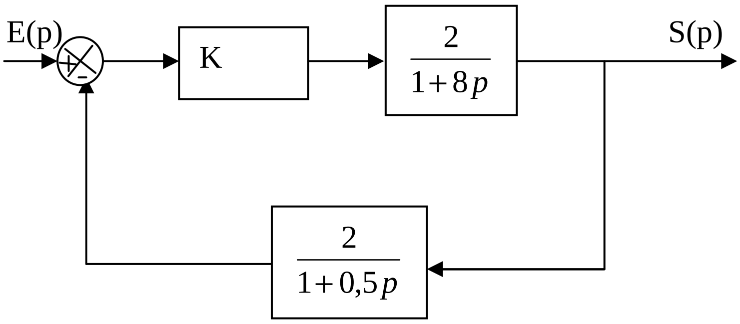
3. $H_3(p) = \dfrac{1}{p^2 + ap + b}$

$D(p) = p^2 + ap + b$

p^2	1	b
p^1	a	0
p^0	b	0

➔ le système est stable ssi a>0 et b>0.

Exercice 2



1. Calculer $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$.

2. Etudier la stabilité en fonction de K.

Correction

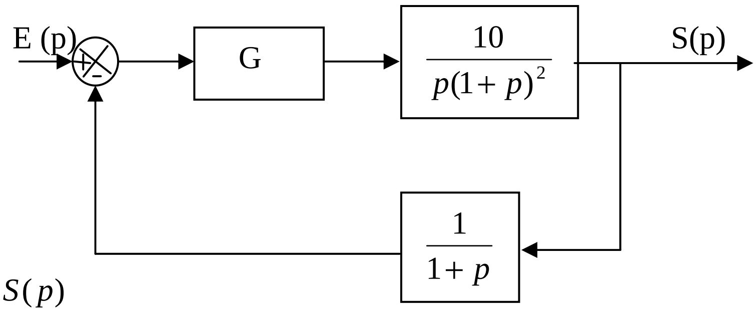
1- $H(p) = \dfrac{2K(1+0{,}5p)}{4p^2 + 8{,}5p + 1 + 4K}$

2- $D(p) = 4p^2 + 8{,}5p + 1 + 4K$

p^2	4	1+4K
p^1	8,5	0
p^0	1+4K	0

➔ Pour que le système soit stable il faut que 1+4K >0 $\Rightarrow$K>-1/4.

Exercice 3



1. Calculer $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}$.

2. Etudier la stabilité en fonction de G.

Correction

1. $H(p)=\dfrac{\dfrac{10G}{p(1+p)^2}}{1+\dfrac{10G}{p(1+p)^3}}=\dfrac{10G(1+p)}{p^4+3p^3+3p^2+p+10G}$

2. Tableau de Routh :

p^4	1	3
p^3	3	1
p^2	$\frac{8}{3}$	10G
p^1	$\dfrac{\frac{8}{3}-10G}{\frac{8}{3}}$	
p^0	10G	

$\frac{8}{3}-10G\succ 0$

$\frac{8}{3}\succ 10G$

$0.2667\succ G\succ 0$

Exercice 4

$$H(p)=\frac{p^2+1}{p^5+4p^4+3p^2+p+K}$$

➢ Etudier la stabilité en fonction de K.

Correction

➔ a_3=0, le système est instable pour toute valeur de K.

Remarques

+Le critère algébrique de Routh permet de savoir de façon simple et rapide si un système est stable ou non.

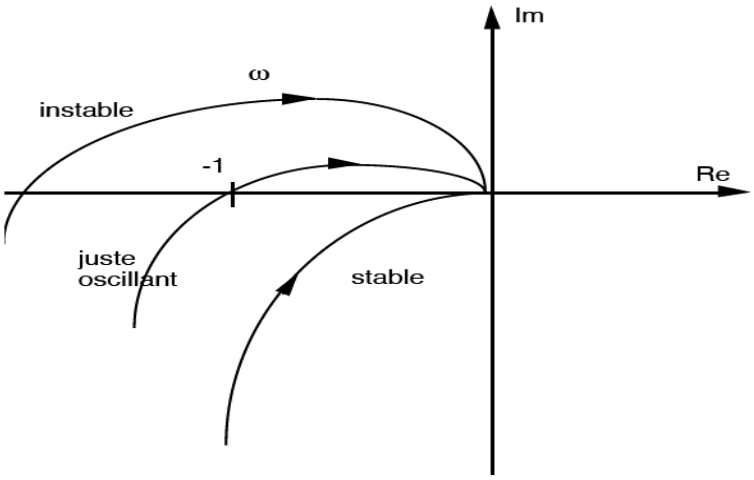
- Aucune information sur la robustesse de cette stabilité.

- La mise en œuvre nécessite de connaître l'expression de la fonction de transfert.

III. Critère géométrique de Nyquist (simplifié)- Critère de Rivers

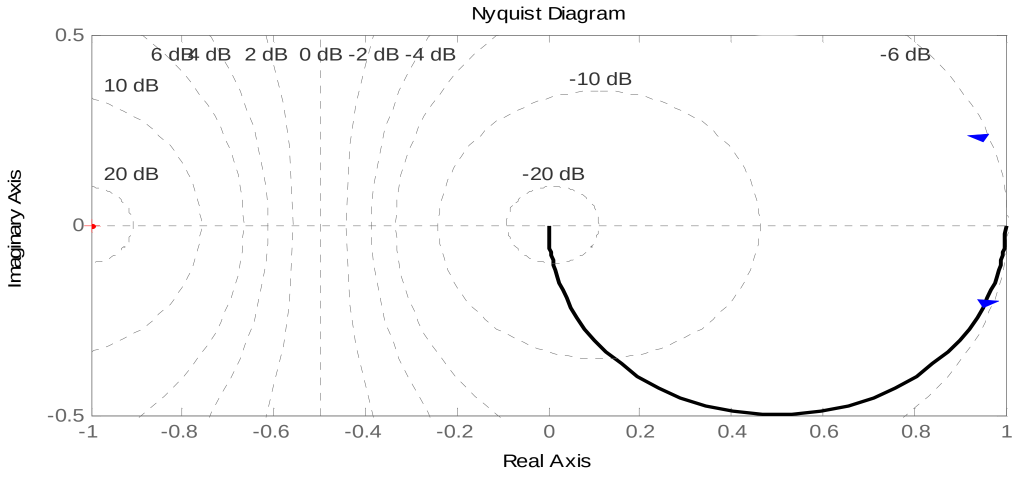
1. Enoncé du Critère de Rivers

Si en se déplaçant sur le lieu de nyquist du système en boucle ouverte dans **le sens des** ω **croissants** on laisse le ***point critique (-1, 0) à gauche*** le système en boucle fermée est stable.



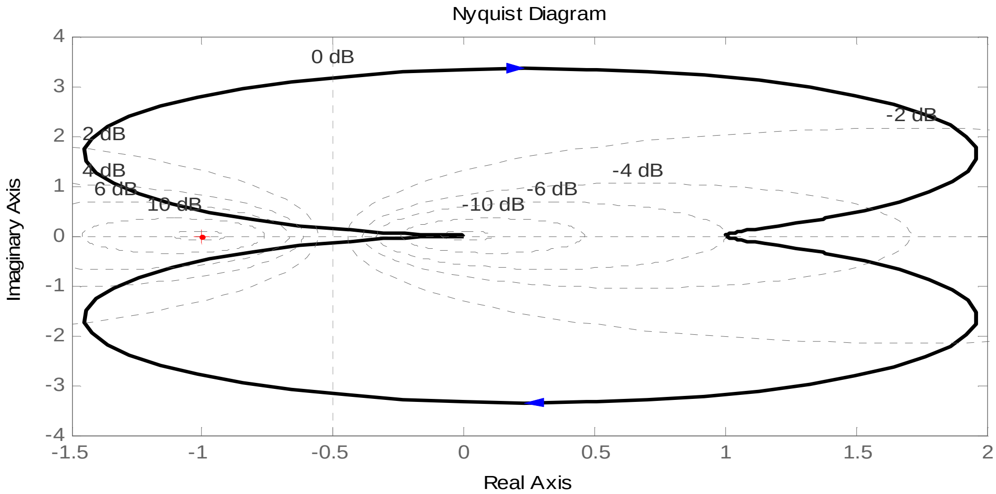
2. Exemples :

1.



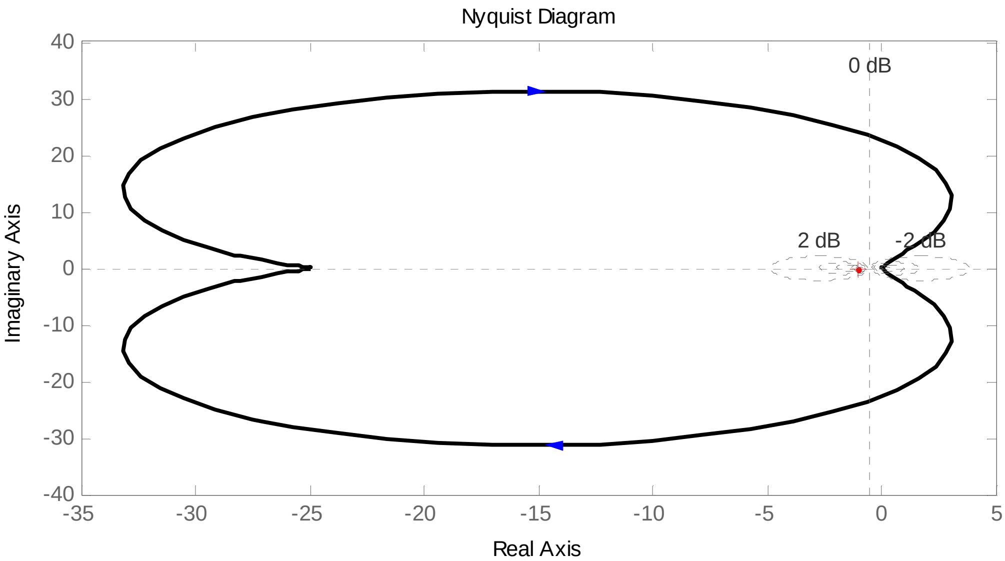
Le système est stable en boucle fermée.

2.



Le système est stable en boucle fermée

3.



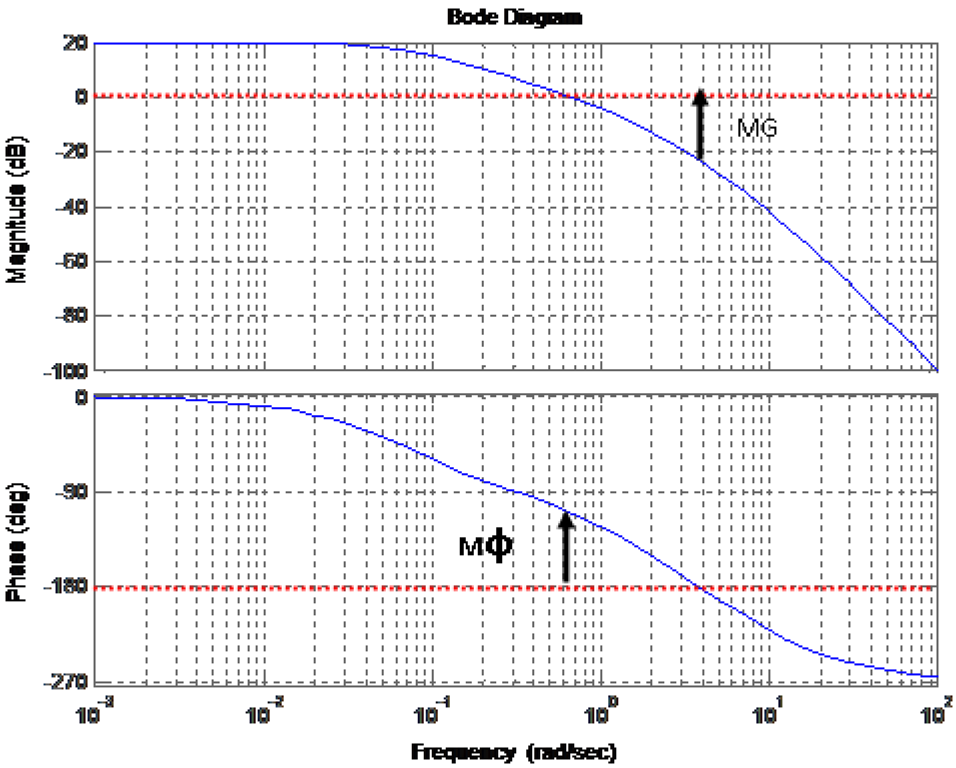
Le système n'est pas stable en boucle fermée

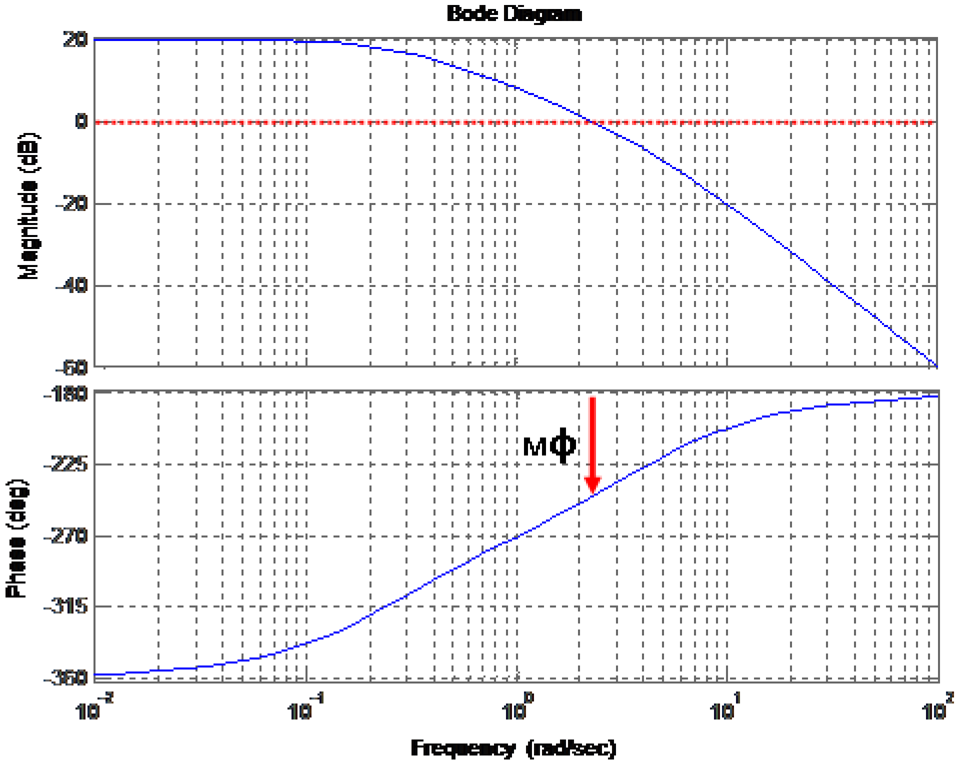
Si le lieu passe par le point critique, le système est juste oscillant.

2. Critère de Rivers dans le plan de Bode

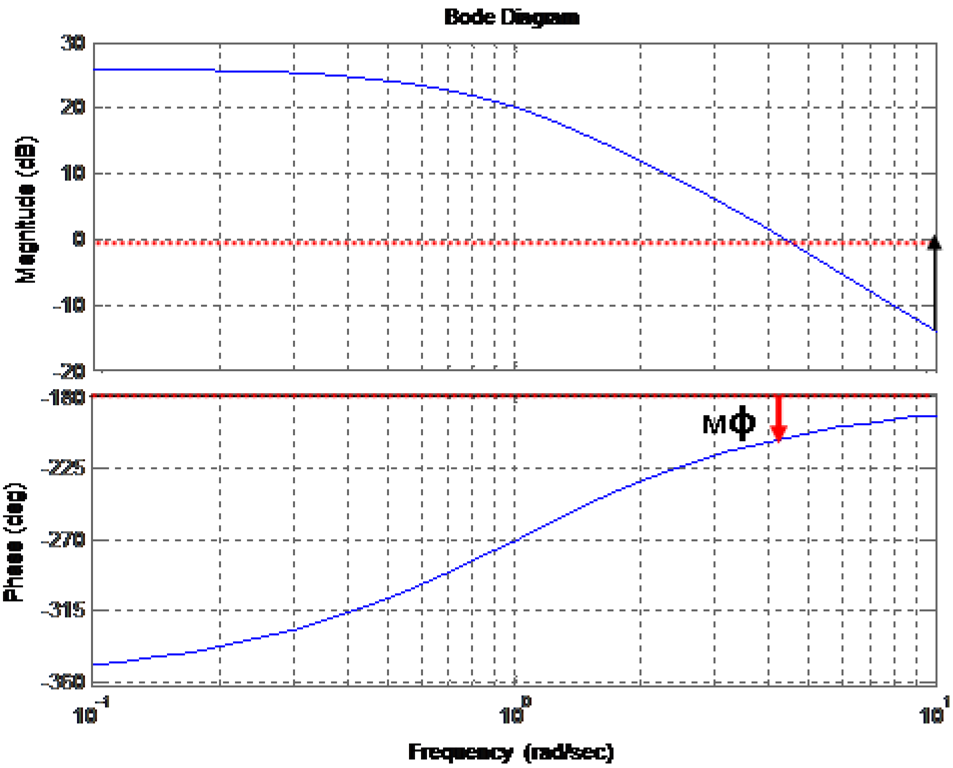
Un système stable en boucle ouverte est stable en boucle fermée ssi la courbe de gain de $|T(j\omega)|_{dB} = f(\omega)$ coupe l'axe des abscisses pour une phase $\varphi(\omega)$ >-180.

Exemple :





$$T(p) = \frac{20}{p^2 - 2p + 1}$$



Le système est instable en BF car MG>0 et Mφ <0

3. Marges de stabilités

a. Marge de Gain : MG

Définition 1:

La marge du gain est le facteur par lequel il faut multiplier le gain de la fonction de transfert en Boucle ouverte pour amener son module à la valeur unitaire.

$$MG = \frac{1}{\|OA\|}$$

$$MG_{dB} = 20\log\frac{1}{\|OA\|} = -20\log\|OA\|$$

Définition2 :

C'est l'écart en gain par rapport à 0 dB lorsque le déphasage est de -180°.

$$MG_{dB} = -20\log|T(j\omega_A)|$$
$$avec:\ Arg(T(j\omega_A)) = -\pi$$

Remarques :

- Si la MG_{dB}>0, le système est stable en BF.
- Si la MG_{dB}<0, le système est instable en BF.
- Si la MG_{dB}=0, le système est juste oscillant en BF
- En pratique, la MG_{dB}>8dB ou la MG_{dB}>15dB

b. Marge de Phase : Mφ

Définition:

C'est l'écart en phase par rapport à -180° lorsque le gain du système en boucle ouverte est égal à 1 (0dB)

$$M\varphi = Arg(T(j\omega_B)) + \pi$$
$$avec: |T(j\omega_B)|_{dB} = 0$$

Remarques :

- Si la $M\varphi$>0, le système est stable en BF.
- Si la $M\varphi$<0, le système est instable en BF.
- Si la $M\varphi$=0, le système est juste oscillant en BF
- En pratique, la $M\varphi$>45°

Exercice 1 :

Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte T(p) placé dans une boucle de régulation à retour unitaire.

$$T(p)=\frac{5}{\left(\frac{p}{100}+1\right)^3}$$

1. Calculer la marge de gain.

2. Calculer la marge de phase.

Correction

1.

$$T(j\omega)=\frac{5}{\left(\frac{j\omega}{100}+1\right)^3}$$

$$\left\{T(j\omega)=\frac{5}{\left(\frac{j\omega}{100}+1\right)\left(\frac{j\omega}{100}+1\right)\left(\frac{j\omega}{100}+1\right)}\right\}$$

$$MG_{dB}=-20\log\left|T(j\omega_A)\right|$$

$$avec:\ Arg(T(j\omega_A))=-\pi$$

$$Arg(T(j\omega))=-arctg(\omega/100)-arctg(\omega/100)-arctg(\omega/100)$$

$$\Rightarrow Arg(T(j\omega))=-3arctg(\omega/100)$$

$$Soit\ \omega_A\ /\ Arg(T(j\omega_A))=-\pi$$

$$\Rightarrow -3arctg(\omega_A/100)=-\pi$$

$$\Rightarrow -arctg(\omega_A/100)=\frac{-\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \omega_A=100\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=173.2rad/s.$$

$$MG_{dB}=-20\log\left|T(j\omega_A)\right|$$

$$\left|T(j\omega_A)\right|=\frac{5}{\sqrt{\left(\frac{\omega_A}{100}\right)^2+1}^{\,3}}=\frac{5}{\sqrt{\left(\frac{173.2}{100}\right)^2+1}^{\,3}}=\frac{5}{8}$$

$$MG_{dB}=4dB$$

2.

$$T(j\omega)=\frac{5}{\left(\frac{j\omega}{100}+1\right)^{3}}$$

$$\left\{T(j\omega)=\frac{5}{\left(\frac{j\omega}{100}+1\right)\left(\frac{j\omega}{100}+1\right)\left(\frac{j\omega}{100}+1\right)}\right\}$$

$$M\varphi=\operatorname{Arg}T(j\omega_B)+\pi$$

$$avec:\ \left|T(j\omega_B)\right|=1$$

$$Soit\ \omega_B\ /\left|T(j\omega_B)\right|=1$$

$$\Rightarrow\left|T(j\omega_B)\right|=\frac{5}{\sqrt{\left(\frac{\omega_B}{100}\right)^2+1}^{\,3}}=1$$

$$\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{\omega_B}{100}\right)^2+1}^{\,3}=5$$

$$\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{\omega_B}{100}\right)^2+1}=\sqrt[3]{5}=1.7$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\omega_B}{100}\right)^2+1=2.92$$

$$\Rightarrow\omega_B=138.8rad/s$$

$$\Rightarrow\operatorname{Arg}T(j\omega_B)=-3arctg(138.8/100)=-162.6°$$

$$\Rightarrow M\varphi=-162.6°+180=17.4°$$

Exercice 2:

Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte T(p) définie par :

$$T(p)=\frac{k}{p(p+100)^2}$$

Déterminer les conditions sur la valeur de k de manière à ce que le système soit caractérisé, en boucle de régulation à retour unitaire, par une marge de phase supérieure à 45° et une marge de gain supérieure à 6dB.