

Devoir à domicile

Exercice 1.

Soit $x \mapsto \|x\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction

$$f(x) = \|x\|$$

est uniformément continue.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^m}{x^2 + y^4}$$

, où $m \in \mathbb{N}^*$.

- i) Quel est le domaine de définition de f ?
- ii) Calculer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, si elle existe, discuter suivant les valeurs du paramètre m .
- iii) Discuter selon les valeurs de m le prolongement par continuité de f .

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 \cos \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

- 1) Étudier la continuité de f en $(0,0)$.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$ et $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$.
- 3) Que peut-on conclure?