Module d' Analyse 4 Fevrier 2020
Licence Maths 2^{eme} Année

Série 1 (Fonctions de plusieurs variables. Limite, continuité)

Excercice 1. a) Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ si $X_n = (n\sin\frac{\pi}{n}, \cos\frac{\pi}{n}, e^{-n}\sin n^2)$.
b) Soit E e.v muni de deux normes équivalentes N_1 et N_2.Montrer que pour toute suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de E et pour tout $l \in E$ on a :

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} X_k = l \text{ pour la norme } N_1 \Longleftrightarrow \lim_{k\longrightarrow+\infty} X_k = l \text{ pour la norme } N_2$$

c) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Montrer que : $\dfrac{\|x-z\|}{1+\|x-z\|} \leq \dfrac{\|x-y\|}{1+\|x-y\|} + \dfrac{\|y-z\|}{1+\|y-z\|}$

Excercice 2 : Trouver le domaine de définition $D \subset \mathbb{R}^2$ et le représenter, pour les fonctions suivantes :

$$a)\ \ f(x,y) = \frac{\ln x + \ln y}{x-y}, \qquad b)\ \ f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2-y}}.$$

$$c)\ f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}\ , \qquad d)\ f(x,y) = arc\sin\frac{y}{x}$$

Excercice 3. : Soit la fonction $f(x,y) = \dfrac{xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y) \neq (0,0)$, en utilisant la définition de la limite, montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Excercice 4. : Soient $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{2y^4}{x^2+y^4}$.
1°) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} f(t,\alpha t) = 0$.
2°) Peut-on en déduire que $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)$ existe ?.

Excercice 5. : Etudier la limite à l'origine de la fonction f définie par

$$a)\ \ f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}, \qquad b)\ \ f(x,y) = \frac{\sin x \sin y}{\tan\sqrt{x^2+y^2}} \qquad c)\ \ f(x,y) = \frac{x^3y^4}{(x^2+y^6)^2}.$$

Excercice 6 : a) Peut on prolonger par continuité en $(0,0)$ les fonctions suivantes : $f_1(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$, $f_2(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$, $f_3(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}$.
b) Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{xy}-\sqrt{xy}}{xy} & si\ \ (x,y)\neq 0 \\ 0 & si\ \ (x,y)=0 \end{cases} \quad ; \quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ \ (x,y)\neq 0 \\ 0 & si\ \ (x,y)=0 \end{cases}.$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & si\ \ (x,y)\neq 0 \\ 0 & si\ \ (x,y)=0 \end{cases} \quad ..f(x,y) = \begin{cases} y + Arc\tan(x^2y) & si\ \ y\neq 0 \\ 0 & si\ \ y=0 \end{cases}.$$