

Série 2 (Dérivées partielles, différentiabilité)

Exercice 1 : Soit la fonction f définie par $f(x, y) = \frac{\ln(1 + xy^2)}{x^2 + y^2}$

a) f est-elle continue en tout point intérieur à son domaine de définition (préciser le domaine en premier).

b) Montrer que f se prolonge par continuité en $(0, 0)$.

Exercice 2 : Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

$$f_1(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}), \quad f_2(x, y) = e^{x^2 + y^3}, \quad f_3(x, y) = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right), \quad f_4(x, y) = \exp\left(\frac{x^2}{y}\right),$$

$$f_5(x, y) = x^y, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Exercice 3 : Soit la fonction $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$

1) Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$.

2) Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ne sont pas continues au point $(0, 0)$.

Exercice 4 : Soit la fonction $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Montrer que f est de classe C^1 .

Exercice 5 : Etudier la différentiabilité en $(0, 0)$ pour les fonctions suivantes :

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2 + 3y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}; \quad f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{(\ln(|yx| + 1))^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f_3(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^3 \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad ..$$

Exercice 6 : Soit la fonction $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$

Montrer que f admet une dérivée suivant tout vecteur en $(0, 0)$ sans être différentiable.

Exercice 7 : Soit f une fonction (réelle) continue au voisinage de $X_0 = (a, b)$.

a) Montrer que si f est différentiable au point X_0 alors la dérivée suivant une direction u , $D_u f(X_0) = f'_u(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot u$.

b) Calculer $f'_u(a, b)$ si $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $u = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Exercice 8 :

Soit la fonction définie par : $f(x, y) = (x - y)^2 \sin\left(\frac{1}{x - y}\right)$ si $x \neq y$ et $f(x, y) = 0$ si $x = y$.

a) Calculer les dérivées partielles de f en un point qlq $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Est-ce qu'elles sont continues sur la droite $\Delta : y = x$?

b) Est-ce que f est différentiable en un point $(x_0, x_0) \in \Delta$.