

# CHAPITRE 1

## RAPPEL MATHÉMATIQUE

### A- Les Nombres complexes

Le courant alternatif a une importance considérable en électronique aussi est-il nécessaire de préciser les notations dont nous aurons besoin par la suite.

#### 1.1) NOTATIONS COMPLEXES

Les nombres complexes, notés habituellement  $Z$ , peuvent être présentés sous plusieurs notations (ou formes) : algébriques (cartésienne), polaires, ou exponentielles.

##### 1.1-1) Notation cartésienne

Nous savons qu'un vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est parfaitement défini quand on a choisi un repère orthonormé de référence quand on se donne soit ses projections  $a$  et  $b$  sur les deux axes, soit son module  $Z$  et son déphasage  $\theta$  par rapport à l'un des deux axes. Grace aux notations imaginaires, on peut exprimer ce vecteur sous une forme cartésienne (ou algébrique). Pour cela, nous choisissons un vecteur unitaire  $\vec{i}$  et nous lui donnons pour support l'axe Ox (fig.1.1). Par convention, nous traduisons une rotation de  $90^\circ$  du vecteur unitaire en multipliant ce vecteur par le **nombre  $j$**  ; un nombre capable de faire effectuer à un vecteur une rotation est encore appelé un opérateur. Ainsi l'axe Oy est-il le support du vecteur  $\vec{j} = j \times \vec{i}$ . Après une nouvelle rotation de  $90^\circ$ , on obtient le vecteur  $j^2 \times \vec{i}$  qui est en opposition avec le vecteur  $\vec{i}$ . En définitif, on a la relation :

$$\boxed{j^2 = -1}$$

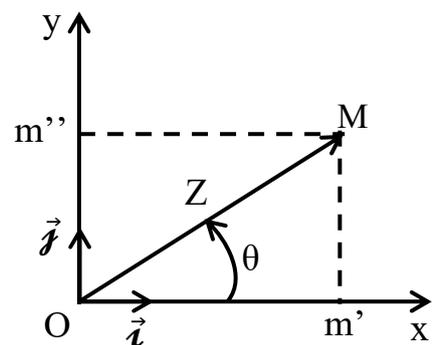


Figure.1.1

**Ainsi l'opérateur  $j$  que nous avons défini arbitrairement possède-t-il toutes les propriétés du nombre imaginaire  $j = \sqrt{-1}$ .**

Les axes Ox et Oy qui portent respectivement les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont appelés respectivement : **axe réel** et **axe imaginaire**.

Soit  $m'$  et  $m''$  les projections de l'extrémité M sur les deux axes (fig.1.1), on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om'} + \overrightarrow{Om''}$$

Le vecteur  $\overrightarrow{Om'}$  qui a même support que  $\vec{i}$  s'exprime alors par le nombre algébrique

**a.** Le vecteur  $\overrightarrow{Om''}$  s'exprimerait, lui aussi, par le nombre algébrique **b.**

Pour simplifier les notations, on peut exprimer un vecteur  $\overrightarrow{OM}$  en nombre complexe écrit en caractères gras :

$$\mathbf{Z} = a + jb$$

### 1.1-2) Notation polaire

Pour tout couple de réels (a , b) différent du couple (0,0), il existe un réel positif Z et une famille d'angles  $\theta$  tels que :  $a = Z \cos(\theta)$  et  $b = Z \sin(\theta)$ .

Tout nombre complexe non nul peut donc s'écrire sous une **forme polaire (trigonométrique)**:

$$\mathbf{Z} = Z (\cos(\theta) + j \sin(\theta)) \quad \text{avec } Z > 0.$$

-Le réel positif Z est appelé le **module** du complexe Z et est noté  $|Z|$  (on utilise aussi la notation Z). Le module du complexe Z est la racine carrée de la somme des carrés des parties réelles et imaginaires :

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

-Le réel  $\theta$  est appelé l'**argument** du complexe Z et est noté :  $\arg(Z)$ .

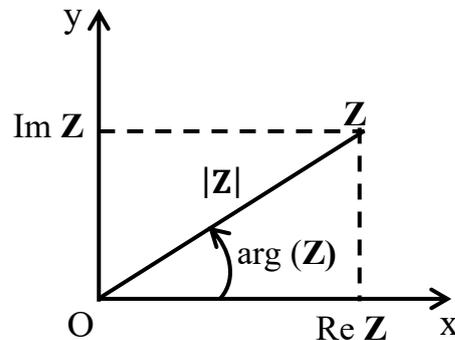


Figure.1.2

### 1.1-3) Notation exponentielle

Nous avons  $\mathbf{Z} = Z (\cos(\theta) + j \sin(\theta))$ , Or d'après les développements en série, nous avons établi en mathématiques et d'après la **formule d'Euler** la relation :

$$\cos(\theta) + j \sin(\theta) = e^{j\theta}$$

En définitive, on peut remplacer la forme polaire par une deuxième expression équivalente, appelée **forme exponentielle** :

$$\mathbf{Z} = Z e^{j\theta}$$

### 1.1-4) Notation exponentielle condensée

La forme exponentielle condensée est une autre écriture de la forme exponentielle.

$$\mathbf{z} = Z \angle \theta$$

La forme condensée  $\mathbf{z} = Z \angle \theta$  est très intéressante, car elle permet d'exprimer  $\theta$  en degrés alors que sous l'autre forme  $\mathbf{Z} = Z e^{j\theta}$ , il faut exprimer  $\theta$  en radians pour que l'écriture soit correcte.

En plus la forme condensée est privilégiée lors des opérations de multiplication ou de division entre nombres complexes. Par contre c'est la notation cartésienne ou algébrique qui s'impose lors des opérations d'addition ou de différence entre nombres complexes.

### 1.2) CONJUGAISON

Le **complexe conjugué** du nombre complexe  $\mathbf{Z} = a + j b$  est  $(a - j b)$ .

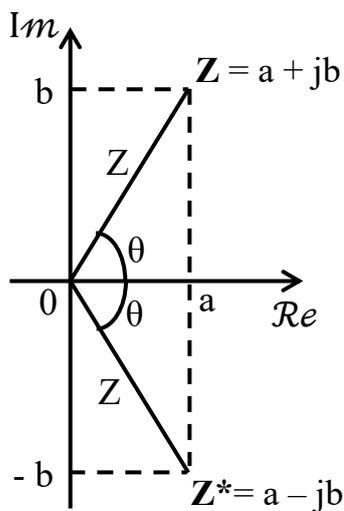


Figure.1.3

Il est noté  $\mathbf{Z}^*$ .

Le conjugué d'un complexe a donc même partie réelle que le complexe de départ mais une partie imaginaire opposée.

Le complexe conjugué d'un complexe non nul a même module que le complexe de départ mais un argument opposé.

Le conjugué d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient est respectivement la

somme, la différence, le produit ou le quotient

des conjugués. Le conjugué du conjugué d'un complexe est le complexe de départ.

### 1.3) Opérations et relations

#### 1.3-1) Addition

Soit à calculer l'expression  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$ .

Dans l'ensemble des nombres complexes, on définit une addition de la manière suivante :

$$\mathbf{Z} = (a + j b) + (c + j d) = (a + c) + j (b + d)$$

C'est la notation cartésienne qui s'impose car elle conduit très rapidement au résultat. Cette opération est **associative, commutative**, possède un **élément neutre** (le complexe nul) et tout complexe possède un opposé :  $\text{opp}(a + j b) = -a + j(-b)$ . L'ensemble des nombres complexes muni de l'addition forme donc un **groupe commutatif**.

### 1.3-2) Multiplication

Dans l'ensemble des nombres complexes, on définit une multiplication de la manière suivante :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2 = (a + j b) \times (c + j d) = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

Cette opération est **associative, commutative, distributive** pour l'addition et possède un élément neutre qui est :1.

Puisque :  $\mathbf{Z} \times 1 = 1 \times \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$

Un complexe est noté indifféremment :  $(a + j b)$  ou  $(a + b j)$ .

Ces propriétés permettent d'obtenir l'égalité suivante :

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^* = (a + j b) \times (a - j b) = a^2 + b^2$$

Puisque la somme  $a^2 + b^2$  de deux carrés de nombres réels est un nombre réel strictement positif (sauf si  $a = b = 0$ ), il existe un **inverse** à tout nombre complexe non nul avec l'égalité :

$$\frac{1}{a + j b} = \frac{a - j b}{a^2 + b^2}$$

L'ensemble des nombres complexes munis de l'addition et de la multiplication est donc un corps commutatif. De plus, l'ensemble des nombres complexes muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur  $\mathcal{R}$  de dimension 2.

Cette écriture est adaptée au calcul du produit de deux nombres complexes du fait des formules d'addition :

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \end{cases}$$

Ces identités, appliquées à la forme trigonométrique des nombres complexes, permettent d'énoncer les règles suivantes où le produit de deux nombres complexes non nuls a pour module le produit des modules et pour argument la somme des arguments .

$$\mathbf{Z} = (|\mathbf{Z}_1| e^{j\theta_1}) \times (|\mathbf{Z}_2| e^{j\theta_2}) = |\mathbf{Z}_1||\mathbf{Z}_2| e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

### 1.3-3) Division

Le quotient de deux nombres complexes non nuls a pour module le quotient des modules et pour argument la différence des arguments. La forme exponentielle condensée met en évidence ces propriétés, en effet :

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{|\mathbf{Z}_1|}{|\mathbf{Z}_2|} \angle \theta_1 - \theta_2$$

La forme polaire est également bien adaptée pour calculer la puissance d'un nombre complexe par la **formule de Moivre** :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^n &= [|\mathbf{Z}|(\cos\theta + j \sin\theta)]^n \\ \mathbf{Z}^n &= |\mathbf{Z}|^n(\cos n\theta + j \sin n\theta) \\ \mathbf{Z}^n &= |\mathbf{Z}|^n e^{jn\theta} \end{aligned}$$

## B- Calcul opérationnel

Au cours des chapitres suivants, nous allons étudié en régime établi le comportement d'un système linéaire quand on le sollicite par des tensions sinusoïdales. Or, avant l'établissement de ce régime, il existe une période transitoire qu'on traitera dans le chapitre 2. D'autre part, on peut appliquer au système, des tensions qui ne sont pas sinusoïdales, certaines d'entre elles, comme la tension échelon, n'étant pas décomposables en série de Fourier. L'étude de tels régimes peut se faire par les méthodes classiques de résolution des équations différentielles, mais c'est souvent long et compliqué.

Le calcul opérationnel permet, grâce à un changement de variable, de remplacer une équation différentielle en une simple expression algébrique. Comme le calcul matriciel, le calcul opérationnel est un outil indispensable à l'étudiant qui veut aborder avec profit l'étude des asservissements. Nous donnerons les grandes lignes de cette méthode.

### 1.4) DÉFINITION

A toute fonction du temps  $f(t)$  **nulle** pour  $t < 0$ , on fait correspondre une fonction  $F(p)$  de variable complexe  $p$  qu'on appelle la **transformée de Laplace** de  $f(t)$

et qu'on écrit :

$$F(p) = \mathcal{L}f(t)$$

$F(p)$  est l'**image** de  $f(t)$ .

La transformation inverse s'écrit :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} F(p)$$

$f(t)$  est l'**original** de  $F(p)$ .

On calcule l'image à partir de la relation de Laplace :

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

On doit signaler que cette transformation de Laplace n'est pas applicable à toutes les fonctions  $f(t)$ . Cependant, dans le cas particulier où la fonction  $f(t)$  est une équation différentielle linéaire comportant un nombre fini de termes, cette transformation est alors applicable sans restriction.

## **1.5) PROPRIÉTÉS DES TRANSFORMÉES DE LAPLACE**

### **1.5-1) Somme de fonctions**

Soit  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  deux fonctions transformables par la relation de Laplace, désignons par  $f(t)$  leur somme :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

Après transformation on a :

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} [f_1(t) + f_2(t)] dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t) dt$$

D'où :

$$F(p) = F_1(p) + F_2(p)$$

**L'image d'une somme est égale à la somme des images de chacune des fonctions.**

### **1.5.2) Dérivation ou intégration**

Soit  $f(t)$  une fonction transformable, on a :

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Intégrons par parties :  $d(u v) = u dv + v du$

Soit :

$$\int_a^b u dv = uv - \int_a^b v du$$

Posons :

$$e^{-pt} dt = dv \text{ et } f(t) = u$$

Il vient :

$$v = -\frac{e^{-pt}}{p} \text{ et } du = f'(t) dt$$

En multipliant les deux membres par  $p$  on a :

$$pF(p) = [-e^{-pt} f(t)]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-pt} f'(t) dt$$

$$[-e^{-pt} f(t)]_0^\infty = \left[ -\frac{f(t)}{e^{pt}} \right]_0^\infty = \left[ \frac{f(t)}{e^{pt}} \right]_\infty^0 = \left[ \frac{f(t)}{1 + pt + \frac{p^2 t^2}{2!} + \frac{p^3 t^3}{3!} + \dots} \right]_\infty^0 = f(0)$$

Soit :

$$pF(p) = f(0) + F'(p)$$

En pratique, les seules fonctions que nous aurons à considérer apparaissent à l'instant  $t = 0$  ; comme elles sont supposées nulles pour  $t = \infty$ , la condition suivante est alors réalisée :  $f(\infty) = 0$

Dans ces conditions on a :

$$F'(p) = pF(p)$$

**La dérivation d'une fonction  $f(t)$  supposée nulle à l'époque  $t = \infty$  équivaut à la multiplication par  $p$  de la fonction image.**

Si  $f'(t)$  est la dérivée d'une fonction  $f(t)$ , inversement la fonction  $f(t)$  peut être considérée comme l'intégrale de  $f'(t)$ . Or la relation précédente nous donne pour les images correspondantes :

$$F(p) = \frac{F'(p)}{p}$$

Ce résultat important que l'on peut démontrer directement en intégrant par parties, s'énonce ainsi :

**L'intégration d'une fonction  $f(t)$  équivaut à la division par  $p$  de la fonction image.**

On signale que le raisonnement qui a été fait pour la dérivée première peut s'appliquer aux dérivées successives. Ainsi, pour la dérivée seconde on a :

$$F''(p) = pF'(p) - f'(0)$$

Si  $f'(0) = 0$  ce qui est généralement le cas pour les fonctions que nous aurons à étudier, on a finalement :

$$F''(p) = p^2 F(p)$$

## 1.6) CALCUL DES TRANSFORMÉES

### 1.6-1) $f(t) = A$ (constante)

On l'appelle encore << fonction échelon >> en raison de sa brusque variation (fig.1.4)

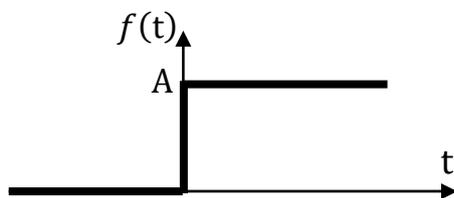


Figure.1.4

$$F(p) = A \int_0^{\infty} e^{-pt} dt$$

$$F(p) = A \left[ -\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{\infty}$$

$$F(p) = \frac{A}{p} \quad \text{d'où} \quad \frac{A}{p} = \mathcal{L}A$$

### 1.6-2) $f(t) = a t$ (fig.1.5)

Dérivons, il vient :  $f'(t) = a$

$f'(t)$  est un échelon, par analogie avec  $f(t) = A$ .

On obtient :  $F'(p) = \frac{a}{p}$  . mais  $F'(p) = pF(p)$ ,

Donc :  $F(p) = a/p^2$  d'où  $a/p^2 = \mathcal{L}a t$

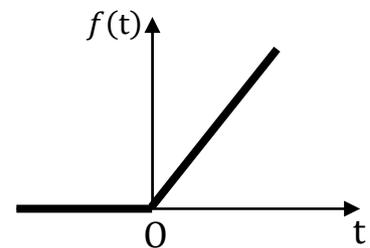


Figure1.5

### 1.6-3) $f(t) = e^{-at}$ (fig.1.6)

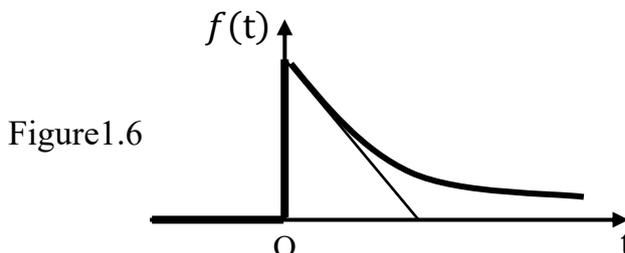


Figure1.6

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t} dt = \frac{1}{p+a}$$

$$\text{D'où} \quad \frac{1}{p+a} = \mathcal{L}e^{-at}$$

### 1.6-4) Transformée ou image de $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

Posons  $a = -j\omega$  dans l'image de l'exercice précédent (1.6-3), on aura :

$$F(p) = \frac{1}{p+a} = \frac{1}{p-j\omega} = \frac{p+j\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

D'où :

$$\frac{p}{p^2 + \omega^2} = \mathcal{L} \cos \omega t \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \mathcal{L} \sin \omega t$$

### 1.7) DETERMINATION DE L'ORIGINAL

La fonction  $F(p)$  étant donnée, on peut rechercher l'original. Nous allons indiquer la méthode de cette détermination qui est souvent difficile.

Sous sa forme générale, la fonction image est représentée par le quotient de deux polynômes, le degré en  $p$  du dénominateur étant supérieur à celui du numérateur :

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$$

Par division du numérateur et du dénominateur par le coefficient du terme du plus haut degré du dénominateur, on peut toujours ramener à l'unité le coefficient de ce terme, puis on calcule les racines du dénominateur, ce qui permet d'écrire :

$$F(p) = \frac{A(p)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_j) \dots (p - p_n)}$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$  désignent les racines du dénominateur, racines qui peuvent être réelles ou complexes. Ensuite on écrit l'expression  $F(p)$  sous la forme d'une somme de

fractions :

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{C_1}{p - p_1} + \frac{C_2}{p - p_2} + \dots + \frac{C_j}{p - p_j} + \dots + \frac{C_n}{p - p_n}$$

Pour déterminer l'un des termes, il suffit de multiplier les deux membres par le dénominateur qui correspond à ce terme, puis de faire tendre ce dénominateur vers zéro, on a :

$$C_j = \lim_{p \rightarrow p_j} \frac{A(p)(p - p_j)}{B(p)}, \quad \text{pour } p \rightarrow p_j$$

On se reporte alors à la table des transformées et l'on a :

$$f(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_j e^{p_j t} + \dots + C_n e^{p_n t}$$

### TABLEAU DES TRANSFORMÉES

| IMAGE | ORIGINAL |
|-------|----------|
|       |          |

| $F(p)$                              | $f(t)$                   |
|-------------------------------------|--------------------------|
| $\frac{A}{p}$                       | $A$                      |
| $\frac{1}{p+a}$                     | $e^{-at}$                |
| $\frac{1}{(p+a)^2}$                 | $t e^{-at}$              |
| $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$     | $\sin \omega t$          |
| $\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$     | $\sinh \omega t$         |
| $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$          | $\cos \omega t$          |
| $\frac{p}{p^2 - \omega^2}$          | $\cosh \omega t$         |
| $\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$ | $e^{-at} \sin \omega t$  |
| $\frac{\omega}{(p+a)^2 - \omega^2}$ | $e^{-at} \sinh \omega t$ |
| $\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$    | $e^{-at} \cos \omega t$  |
| $\frac{p+a}{(p+a)^2 - \omega^2}$    | $e^{-at} \cosh \omega t$ |

### **C- Calcul matriciel**

Nous nous proposons dans ce paragraphe de donner un rappel sur le calcul matriciel, ceci étant un outil indispensable lors de l'étude des quadripôles. En effet s'il nous paraît utile qu'un étudiant sache calculer directement par les méthodes traditionnelles (méthodes des mailles et des nœuds) les circuits les plus complexes, il nous semble également utile qu'il puisse disposer de ce nouveau procédé de calcul qui lui sera particulièrement précieux pour la détermination des différents paramètres des quadripôles.

### 1.8) Définitions

Une matrice  $n \times m$  est un tableau de nombres à **n lignes** et **m colonnes** :

Exemple : avec  $n = 2$ ,  $m = 3$  :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

2 Lignes

3 Colonnes

**n** et **m** sont les **dimensions** de la matrice.

Une matrice est symbolisée par une lettre en caractères gras, par exemple **A**, ou **[A]**. On note  $a_{ij}$  l'élément situé à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  (la ligne est toujours nommée en premier).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

On note  $[A_{ij}]$  la matrice d'élément général  $A_{ij}$ . On a donc :

$$A = A_{ij}$$

Si  $n = m$ , la matrice est appelée **matrice carrée**.

Quelques matrices carrées particulières (Exemples :  $n = 4$ )

|                            |  |   |
|----------------------------|--|---|
| Matrice <b>unité</b> :     | $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | Parfois notée <b>I<sub>n</sub></b> .<br><b>n</b> est la dimension<br>de la matrice (soit <b>I<sub>4</sub></b> ) |
| Matrice <b>diagonale</b> : |  |   |

|   |   |
|---|---|
|   | $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{pmatrix}$                               |
| Matrice <b>triangulaire supérieure</b> $\mathbf{U}$ | $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{pmatrix}$ |
| Matrice <b>triangulaire inférieure</b> $\mathbf{L}$ | $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{pmatrix}$ |

Une matrice carrée  $\mathbf{A}$  est dite **symétrique** si :

$$A_{ji} = A_{ij}$$

pour tout  $i$  différent de  $j$ , et que toute matrice symétrique se confond avec sa matrice Transposée.

## 1.9) Opération sur les matrices

### 1.9-1) Addition, soustraction

L'addition et la soustraction des matrices se font terme à terme. Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

### 1.9-2) Multiplication par un nombre

Chaque terme de la matrice est multiplié par le nombre :

$$2 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

### 1.9-3) Transposition

La transposée  $\mathbf{A}^T$  (aussi notée  $\mathbf{A}'$ ) d'une matrice  $\mathbf{A}$  est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

#### 1.9-4) Multiplication des matrices

Définissons tout d'abord le produit d'une matrice-ligne  $\mathbf{X}$  par une matrice colonne  $\mathbf{Y}$ :

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i$$

Le produit matriciel s'en déduit : le produit de la matrice  $\mathbf{A}$  ( $n \times m$ ) par la matrice  $\mathbf{B}$  ( $m \times p$ ) est la matrice  $\mathbf{C}$  ( $n \times p$ ) telle que l'élément  $C_{ij}$  est égal au produit de la ligne  $i$  de la matrice  $\mathbf{A}$  par la colonne  $j$  de la matrice  $\mathbf{B}$ .

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} B_{jk} \quad i = 1 \dots n \ ; \ j = 1 \dots p$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 9 \end{pmatrix}$$

On a en effet, en effectuant les produits ligne par colonne :

$$(1 \ 2 \ 0) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times 5 + 2 \times 2 + 0 \times 3 = 9$$

$$(1 \ 2 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 4 = 7$$

$$(4 \ 3 \ -1) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 5 + 3 \times 2 - 1 \times 3 = 23$$

$$(4 \ 3 \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \times 1 + 3 \times 3 - 1 \times 4 = 9$$

#### Propriétés :

- Le produit matriciel est :

❖ *associatif* :  $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

❖ *distributif par rapport à l'addition* :

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

❖ *non commutatif* :  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ .

❖ La matrice unité  $\mathbf{I}$  est *élément neutre* pour la multiplication :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{I}_m = \mathbf{I}_n \times \mathbf{A} = \mathbf{A}, \text{ si la matrice } \mathbf{A} \text{ est de dimensions } n \times m.$$

❖ Transposée d'un produit :  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$  (Attention au changement d'ordre !)

### 1.9-5) Inversion des matrices carrées

Une matrice carrée  $\mathbf{A}$  est dite *inversible* ou *régulière* s'il existe une matrice carrée  $\mathbf{A}^{-1}$  (appelée *matrice inverse*) telle que:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Si  $\mathbf{A}^{-1}$  n'existe pas, la matrice  $\mathbf{A}$  est dite *singulière*.

**Propriétés :**

❖  $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

❖  $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

❖  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$  (Attention au changement d'ordre !)

❖  $[\text{diag}(\mathbf{D}_{ii})]^{-1} = \text{diag}(1/\mathbf{D}_{ii})$

❖ La matrice  $\mathbf{A}$  est dite *orthogonale* si  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

#### Avertissement

**la première chose à faire pour calculer l'inverse d'une matrice, c'est le calcul de son déterminant. Car si son déterminant est nul (= 0), vous n'aurez pas besoin d'aller plus loin, la matrice n'admet pas d'inverse. Donc commencez toujours par calculer le déterminant.**

Pour une matrice  $2 \times 2$ , on montre que la matrice inverse est donnée par :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta \mathbf{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Le nombre  $\Delta$  est appelé *déterminant* (il est aussi noté *dét*), il est égal à :

$$\Delta \mathbf{A} = \text{dét}(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ac - bd$$

La matrice inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  n'existe donc que si  $\text{dét}(\mathbf{A})$  est différent de zéro.

La matrice  $\mathbf{A}$  est singulière si  $\det \mathbf{A} = 0$ , régulière dans le cas contraire.

### Propriétés des déterminants :

- ❖  $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$
- ❖  $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \times \det(\mathbf{B})$
- ❖ Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des éléments diagonaux. En particulier,  $\det(\mathbf{I}) = 1$  (si  $\mathbf{I}$  est la matrice unité)
- ❖ Si  $\mathbf{A}$  est régulière,  $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1 / \det(\mathbf{A})$   
puisque  $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \times \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{I}) = 1$
- ❖ Si  $\mathbf{A}$  est orthogonale,  $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$   
puisque  $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T) = [\det(\mathbf{A})]^2 = \det(\mathbf{I}) = 1$

### 1.9-6) Comment calculer l'inverse d'une matrice 3x3

Il est fréquent en algèbre d'utiliser les inverses pour se faciliter la tâche. Pour diviser une valeur par une fraction, il est plus commode de multiplier cette valeur par l'inverse de cette fraction : c'est ce qu'on appelle une opération inverse. En ce qui concerne les matrices, la division n'a aucun sens : il faut alors en passer par la multiplication de la matrice inverse, ce qui suppose de la déterminer au préalable. Le calcul à la main de l'inverse d'une matrice 3x3 est un travail simple, mais un peu fastidieux, c'est cependant une opération très instructive au regard du fonctionnement des matrices. Si vous faites du calcul matriciel à longueur de journée, mieux vaut savoir utiliser une calculatrice graphique.

La matrice inverse d'une matrice 3x3, est donnée par la formule

suivante :

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\Delta \mathbf{M}} \mathbf{M}^*$$

Où  $\Delta \mathbf{M}$  représente le déterminant de la matrice  $\mathbf{M}$ , et  $\mathbf{M}^*$  l'adjointe de la matrice  $\mathbf{M}$ .

#### Établissons la matrice adjointe $\mathbf{M}^*$

Première étape : Détermination de la matrice transposée

La matrice transposée de la matrice de départ  $\mathbf{M}$  est notée :  $\mathbf{M}^T$

La transposition est une opération qui consiste à transformer les lignes en colonnes, c'est-à-dire que la première ligne devient la première colonne, que la ligne du milieu

devient la colonne du milieu, et enfin, que la troisième ligne devient la troisième colonne.

Si on prend comme exemple :  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

On aura :  $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Deuxième étape : Calcul des déterminants des neufs matrices mineurs issus de la matrice transposée  $M^T$

Ces déterminants sont notés :  $m_{ij}$

$m_{ij}$  représente le déterminant de la matrice mineur qu'on obtient lorsqu'on supprime la ligne  $i$ , et la colonne  $j$  de la matrice  $M^T$ .

Reprenons notre exemple et calculons les  $m_{ij}$ .

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -24 \quad m_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -18 \quad m_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20 \quad m_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15 \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -5 \quad m_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -4 \quad m_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Troisième étape : Établissons la matrice des cofacteurs

Les éléments de la matrice des cofacteurs sont  $C_{ij}$ , ils sont déterminés par la relation

suivante :  $C_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$

$$\begin{array}{lll} C_{11} = -24 & C_{12} = 18 & C_{13} = 5 \\ C_{21} = 20 & C_{22} = -15 & C_{23} = -4 \\ C_{31} = -5 & C_{32} = 4 & C_{33} = 1 \end{array}$$

La matrice des cofacteurs est donc :

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice qu'on vient d'obtenir n'est autre que la matrice adjointe de la matrice de départ  $M$ . On l'appelle aussi « comatrice » ou « matrice transconjugée ». Elle est le plus souvent notée **com(M)** ou  $M^*$

$$M^* = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Quatrième étape : Matrice inverse.

On divise chaque terme de la matrice  $M^*$  par le déterminant de  $M$  ( $\Delta M$ ), qui a été calculé avant la première étape, pour notre exemple  $\Delta M = 1$ .

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta M} M^* = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

## CHAPITRE 2

# COURANT ALTERNATIF

### 3.1) Définition

Le courant dit alternative correspond à un mouvement des électrons qui se fait successivement dans un sens, puis dans l'autre.

Le courant alternatif est produit par **la rotation d'un alternateur**, que l'on peut schématiser par une bobine de fil conducteur tournant dans un champ magnétique.

Cette rotation génère dans la bobine un courant alternatif, c'est-à-dire un mouvement de va-et-vient des électrons, dont la fréquence varie en fonction de la vitesse de rotation de la bobine.

Ainsi, une bobine tournant à 50 tours par seconde génère un courant de 50 Hz (Hertz).

Tout courant alternatif périodique est caractérisé par sa fréquence, mesurée en hertz.

C'est le nombre «**d'aller-retour**» qu'effectue le courant électrique en une seconde.

Un courant alternatif périodique de 50 Hz effectue 50 «**aller-retour**» par seconde, c'est-à-dire qu'il change 100 fois (50 allers et 50 retours) de sens par seconde. Un

réseau 220V à une fréquence  $f = 50$  Hz, c.à.d. 50 périodes par seconde. D'où une période dure 0,02 s. (une période  $\rightarrow \frac{1}{50} = 0,02$  s).

Le courant alternatif à 60 Hz a une meilleur efficacité à longue distance, par contre le courant alternatif à 50 Hz son efficacité est à courte distance.

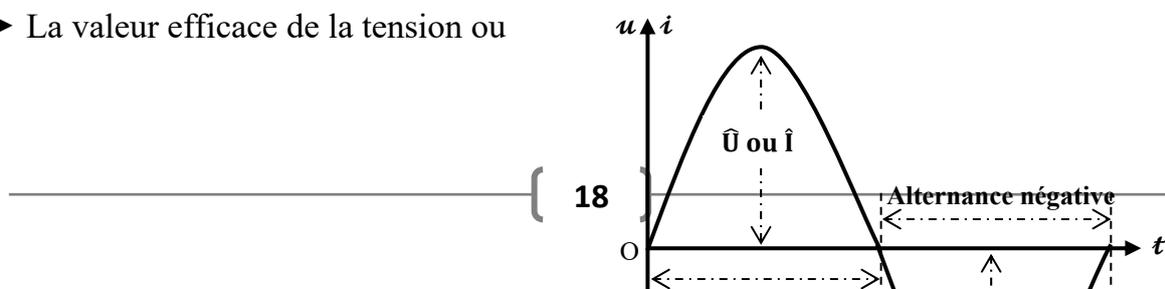
La forme la plus utilisée de courant alternatif est le courant sinusoïdale, essentiellement pour la distribution commerciale de l'énergie électrique, et les pertes d'énergie sont limitées. Il facilite le passage d'un niveau de tension à un autre.

En effet, pour arriver jusque chez vous, le courant qui circule sur les lignes très haute tension à 400 000 volts, est peu à peu transformé en courant à 220 volts.

La tension et l'intensité du courant varient constamment en fonction du temps d'après une courbe appelée «**Sinusoïde**».

►  $\hat{U}$  ou  $\hat{I}$  : Valeur de crête ou amplitude. C'est la valeur maximale de la tension ou du courant atteinte au cours d'une période.

► La valeur efficace de la tension ou



du courant est donnée par :

$$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} ; I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$$

► Valeur moyenne :

Si une fonction  $f(t)$  est périodique de période T, la valeur moyenne s'exprime par :

$$f_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

La valeur moyenne de la tension ou du courant ( $U_{moy}$  ou  $I_{moy}$ ), pour un signal périodique sinusoïdal pendant une période est nulle. Pour une alternance on aura :

$$U_{moy} = 0,637 \hat{U} \quad \text{et} \quad I_{moy} = 0,637 \hat{I}$$

► Valeur efficace :

Si une fonction  $f(t)$  est périodique de période T sa valeur efficace est :

$$f_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt$$

Lorsqu'on mesure une tension alternative avec un voltmètre celui-ci indiquera une valeur constante, c'est la valeur efficace ( $U_{eff}$ ). Idem pour l'intensité du courant.

Les valeurs indiquées sur les appareils de mesure fonctionnant en alternatif sont des valeurs efficaces.

### **3.2) Détermination de grandeurs Sinusoïdales de même Fréquence**

#### **3.2-1) Cas d'une résistance pure**

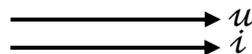
On dit qu'un récepteur est purement Ohmique lorsqu'il est soumis à un courant alternatif ne présente aucun comportement particulier ( Radiateur, fer à repasser, lampe à incandescence, fer à souder ), toute l'énergie absorbée est transformée en chaleur.



Si  $i = I\sqrt{2} \sin \omega t$ , alors d'après la loi d'Ohm on a :

$$u = R i = RI\sqrt{2} \sin \omega t.$$

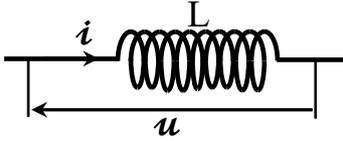
On remarque en comparant  $i$  et  $u$  qu'ils sont en phase, étant donné qu'on retrouve  $\sin \omega t$  dans les deux expressions.



$u$  peut s'écrire encore en fonction de l'amplitude  $\hat{U}$  :  $u = \hat{U} \sin \omega t = U\sqrt{2} \sin \omega t$ .  
Où  $U = U_{\text{eff}} = RI$ , qui est une valeur réelle pure.

### 3.2-2) Cas d'une inductance pure

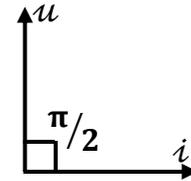
La bobine possède un comportement spécifique, les oscillations de  $i$  sont ralenties, c.à.d. freinées par la self-induction, par conséquent les amplitudes du courant sont inférieures à celles de la tension.



On sait que pour faire passer un courant  $i = I\sqrt{2} \sin \omega t$  dans une inductance, il faut

appliquer à ses bornes une tension  $u = L \frac{di}{dt}$ , soit :

$$u = L\omega I\sqrt{2} \cos \omega t = L\omega I\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/2).$$



Par simple comparaison entre  $i$  et  $u$  on constate facilement que  $u$  est en avance de  $\pi/2$  sur  $i$ . Par conséquent la tension  $u$  aux bornes de  $L$  est imaginaire pure, en vertu des notations complexes énoncées au premier chapitre (paragraphe 1.1).

Il vient :  $u = jL\omega I\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/2)$ .

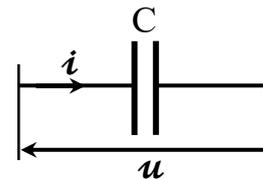
$u$  peut s'écrire aussi :  $u = \hat{U} \sin(\omega t + \pi/2) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/2)$ , où  $U = jL\omega I$ .

D'après la loi d'Ohm  $U = Z_L I$ , donc  $Z_L = j L \omega = j X_L$ .

$Z_L$  = Impédance de la bobine, elle est imaginaire pure,  $X_L = L\omega$  réactance en Ohm.

### 3.2-3) Cas d'un condensateur

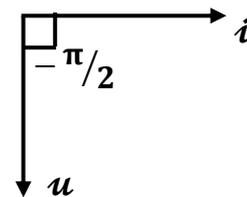
Le circuit de la figure en face est parcouru par un courant sinusoïdale d'intensité  $i(t) = I\sqrt{2} \sin \omega t$ .



Par définition la capacité d'un condensateur est :  $C = \frac{q}{u}$ , d'autre part l'intensité qui le traverse a pour valeur :  $i = dq / dt$ . On en déduit la relation suivante entre les valeurs instantanées :  $i = \frac{dq}{dt} = C \left( \frac{du}{dt} \right) \Rightarrow u(t) = \frac{1}{C} \int i dt$

Il vient :  $u(t) = \frac{I\sqrt{2}}{C\omega} (-\cos \omega t) = \frac{I\sqrt{2}}{C\omega} \sin(\omega t - \pi/2)$

ainsi la tension  $u$  est en retard de  $(\pi/2)$  sur l'intensité  $i$ , à ce titre  $u$  est imaginaire pure (paragraphe 1.1, chapitre premier).



donc :  $u(t) = -j \frac{I\sqrt{2}}{C\omega} \sin(\omega t - \pi/2)$

$u(t)$  peut s'écrire  $u(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t - \pi/2)$  où  $U = -j \frac{I}{C\omega}$

Mais d'après la loi d'Ohm on a  $U = Z_C I$ .

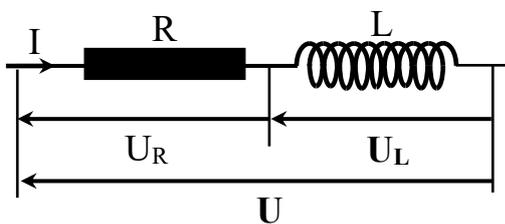
Il vient alors :  $Z_C = \frac{-j}{C\omega} = -j X_C$

$Z_C$  = Impédance du condensateur, elle est imaginaire pure,

$X_C = 1/C\omega$  où  $X_C$  représente la réactance du condensateur, son unité est l'Ohm.

### 3.2-4) Couplage série

#### 3.2-4a) Résistance et bobine



$$U = U_R + U_L = RI + Z_L I$$

$$U = (R + j X_L) I$$

En substituant  $X_L$  par  $L\omega$ , on peut écrire :

$$U = (R + jL\omega) I$$

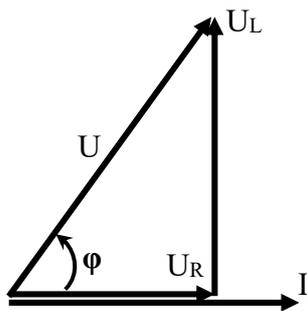
D'autre part d'après la loi d'Ohm on peut écrire aussi :  $U = Z I$ .

En comparant les deux expressions de  $U$ , on en déduit que :

$Z = R + jL\omega = R + jX_L$  n'est autre que l'impédance complexe du circuit R L série

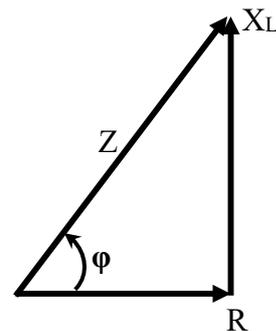
### Représentation (construction) de Fresnel

Diagramme des tensions

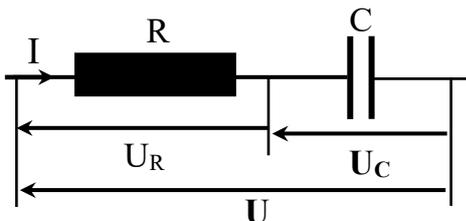


$$\tan \varphi = \frac{X_L}{R} = \frac{L\omega}{R}$$

Diagramme des impédances



#### 3.2-4b) Résistance et condensateur



$$U = U_R + U_C = RI + Z_C I$$

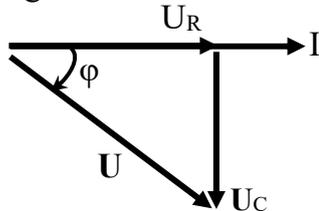
$$U = (R - j X_C) I$$

En remplaçant  $X_C$  par  $\frac{1}{C\omega}$ , on peut écrire :  $U = (R - \frac{j}{C\omega}) I$ .

D'autre part d'après la loi d'Ohm on peut écrire aussi :  $U = Z I$ . En comparant les deux expressions de  $U$ , on en déduit que  $Z = R - \frac{j}{C\omega} = R - j X_C$  n'est autre que l'impédance complexe du circuit RC série .

### Représentation (construction) de Fresnel

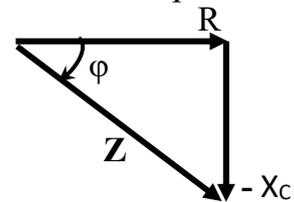
Diagramme des tensions



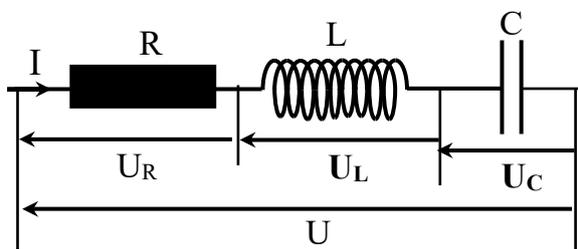
$$\tan \varphi = \frac{-X_C}{R} = -\frac{1}{RC\omega}$$

donc  $\varphi < 0$

Diagramme des impédances



### 3.2-4c) Groupeement RLC



$$U = U_R + U_L + U_C = R I + Z_L I + Z_C I$$

$$U = R I + j X_L I - j X_C I$$

$$U = [R + j (X_L - X_C)] I$$

Ou bien encore :

$U = [R + j (L\omega - \frac{1}{C\omega})] I$ . Mais là aussi on a  $U = Z I$ , il vient alors par comparaison des deux dernières expressions de  $U$  que

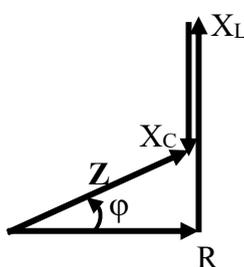
$$Z = R + j (L\omega - \frac{1}{C\omega}) \quad \text{on encore } Z = R + j (X_L - X_C)$$

**Z représente l'impédance complexe totale du circuit RLC série.**

### Représentation (construction) de Fresnel :

Trois cas peuvent se présenter :

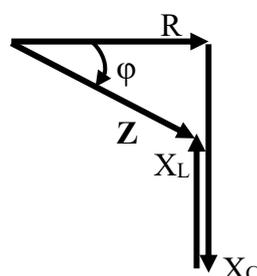
1)  $X_L > X_C$  ( $U_L > U_C$ )



Circuit inductif

$$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} > 0$$

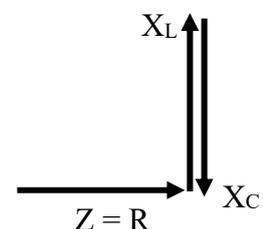
2)  $X_L < X_C$  ( $U_L < U_C$ )



Circuit capacitif

$$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} < 0$$

3)  $X_L = X_C$  ( $U_L = U_C$ )



Circuit en résonance

$$\tan \varphi = 0$$

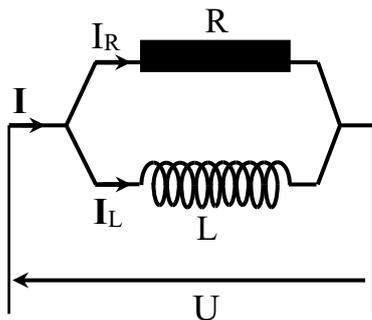
### Résonance série

Lorsque dans un circuit alternatif série, la réactance de la bobine est égale à la réactance du condensateur, c.à.d.  $X_L = X_C$  le circuit est en résonance. Les deux réactances se compensent. L'impédance du circuit diminue fortement et se réduit à sa seule résistance Ohmique.

Donc à la résonance on a :  $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow \boxed{LC\omega_0^2 = 1}$

### 3.2-5) Couplage parallèle

#### 3.2-5a) Résistance et bobine



$$I = I_R + I_L = \frac{U}{R} + \frac{U}{Z_L} = \frac{U}{R} + \frac{U}{jX_L}$$

$$I = \left( \frac{1}{R} - j \frac{1}{L\omega} \right) U$$

$$I = \frac{U}{Z} \quad \left. \vphantom{I = \frac{U}{Z}} \right\} \Rightarrow \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} - j \frac{1}{L\omega}$$

Dans les couplages parallèles on utilise souvent la grandeur **Admittance** à la place de l'impédance, le courant peut s'écrire alors :  $I = Y U$ .

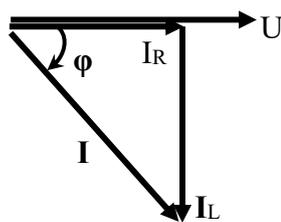
**Y** représente l'**admittance complexe du circuit RL parallèle**.

$$Y = \frac{1}{Z} \Rightarrow Y = \frac{1}{R} - j \frac{1}{L\omega}$$

**Y** s'exprime en Siemens.

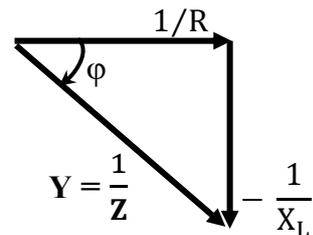
#### Représentation (construction) de Fresnel

Diagramme des intensités

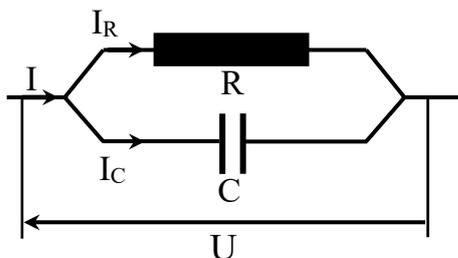


$$\tan \varphi = \frac{-1/L\omega}{1/R} = -\frac{R}{L\omega} < 0$$

Diagramme des admittances



#### 3.2-5b) Résistance et condensateur



$$I = I_R + I_C = \frac{U}{R} + \frac{U}{Z_C} = \frac{U}{R} + j \frac{U}{X_C}$$

$$I = \left( \frac{1}{R} + j C\omega \right) U$$

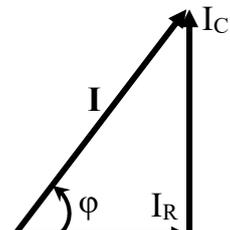
$$I = \frac{U}{Z} \quad \left. \vphantom{I = \frac{U}{Z}} \right\} \Rightarrow \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + j C\omega$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + j C\omega$$

**Y** représente l'**admittance complexe du circuit RC parallèle**.

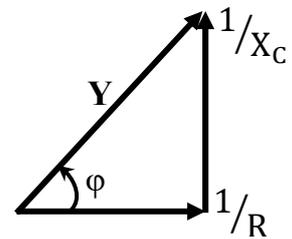
## Représentation (construction) de Fresnel

Diagramme des intensités

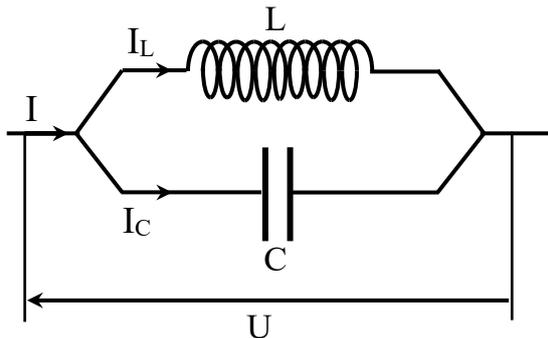


$$\tan \varphi = \frac{1/X_C}{1/R} = RC\omega > 0$$

Diagramme des admittances



3.2-5c) Bobine et condensateur



$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}_L} + \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}_C}$$

$$\mathbf{I} = \left( \frac{1}{jX_L} - \frac{1}{jX_C} \right) \mathbf{U}$$

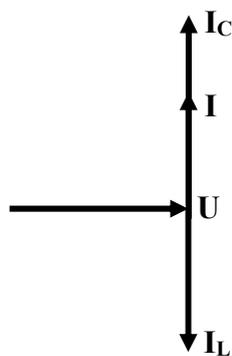
$$\mathbf{I} = \left( \frac{1}{jL\omega} + jC\omega \right) \mathbf{U}$$

$\mathbf{I} = j \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \mathbf{U}$  donc  $\mathbf{I}$  est un imaginaire pure.

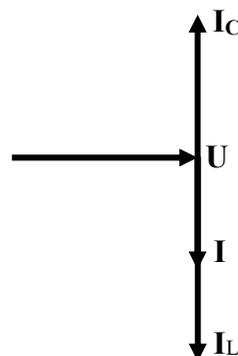
mais  $\mathbf{I} = \mathbf{Y} \mathbf{U}$ , donc :  $\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = j \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)$

$\mathbf{Y}$  représente l'admittance complexe du circuit LC parallèle

## Représentation (construction) de Fresnel



$$\begin{aligned} I_C &> I_L \\ Z_C &< Z_L \\ X_C &< X_L \end{aligned}$$

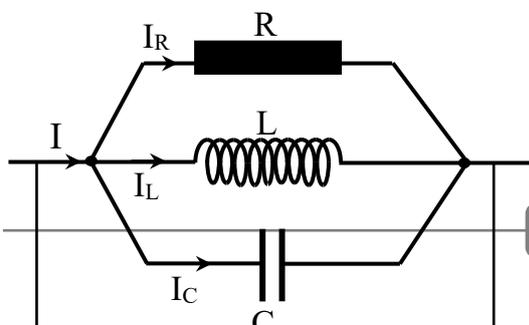


$$\begin{aligned} I_L &> I_C \\ Z_L &< Z_C \\ X_L &< X_C \end{aligned}$$

A la résonance  $L\omega = \frac{1}{C\omega}$  ( $X_L = X_C$ )  $\Rightarrow Y = 0$  et donc  $I = 0$

Il en résulte donc qu'à la résonance l'ensemble inductance et condensateur constitue un **circuit Bouchon**, comme si  $Z = \infty$ .

## 3.2-5d) Groupement RLC



$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{R}} + \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}_L} + \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}_C}$$

$$I = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} - \frac{1}{jX_C} \right) U$$

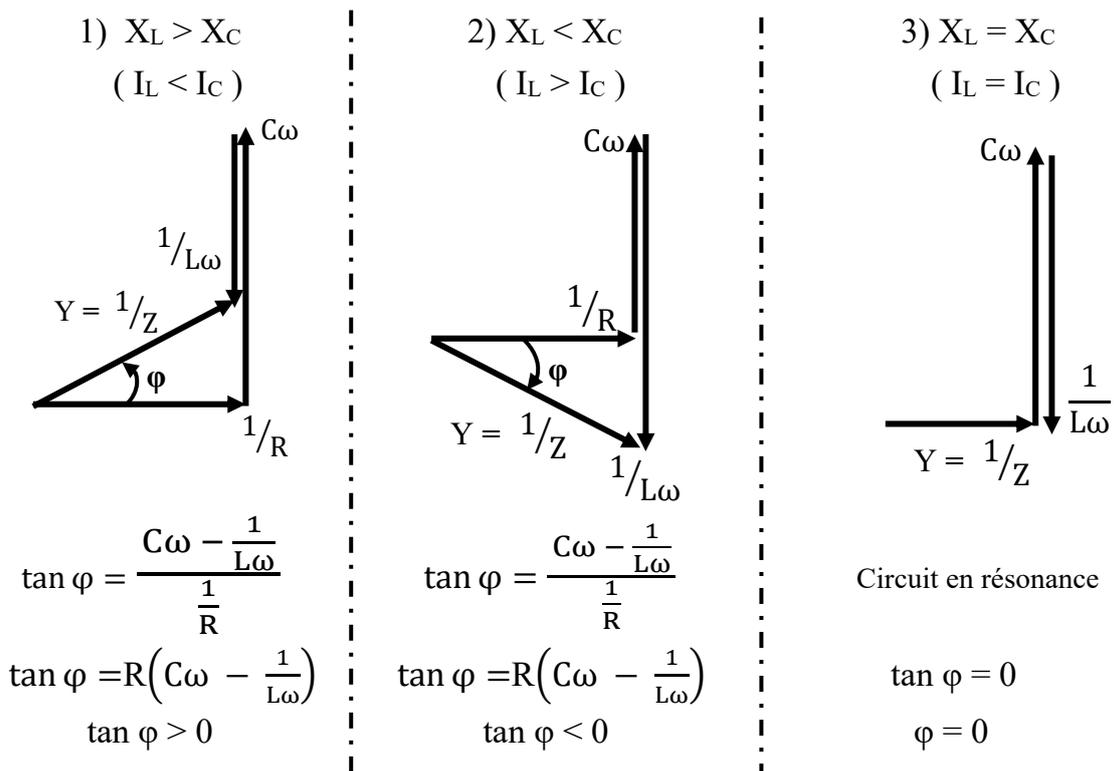
$$I = \left( \frac{1}{R} + j \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right) U$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + j \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)$$

**Y** représente l'admittance complexe du circuit RLC parallèle

### Représentation (construction) de Fresnel :

là aussi trois cas peuvent se présenter, selon les valeurs des réactances  $X_L$  et  $X_C$  :  
 $X_L$  supérieur à  $X_C$  ;  $X_L$  inférieur à  $X_C$  ;  $X_L$  égale à  $X_C$ . La représentation de Fresnel attribuée à chaque cas est schématisée par les figures ci-dessous.



### 3-3) Facteur de Qualité

Le facteur de qualité ( ou facteur Q) d'un système est une mesure sans unité.

Q peut être défini comme étant le rapport de **la fréquence de résonance**  $\nu_0$  ( fréquence à laquelle le gain est maximal ) à la largeur de la bande passante de la résonance  $\Delta \nu$  du système.

$$Q = \frac{\nu_0}{\Delta \nu}$$

Fréquence de résonance

Fréquence de résonance

Largeur de la bande passante

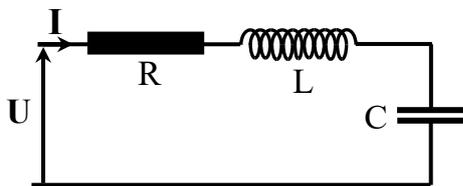
Largeur de la bande passante

Plus le facteur de qualité est élevé, plus la bande passante est petite, et plus la résonance est en piquée.

Le facteur de qualité permet donc de **quantifier la qualité du filtre** ( qu'il soit électronique, acoustique, optique, etc...). Plus **Q** est élevé, plus le filtre est sélectif.

**Q** représente la sélectivité du filtre passe bande.

### 3-3.1) Montage RLC série



Calculons l'intensité du courant absorbée quand la tension appliquée à une valeur efficace **U** constante, et une pulsation  $\omega$  variable.

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

Si l'on fait varier la pulsation  $\omega$ , on constate que l'impédance du circuit est minimale quand la condition de résonance est satisfaite. C.à.d. à la résonance on a  $Z_0 = R$ , soit

$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$  soit  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Pour cette pulsation ( $\omega_0$ ) l'intensité du courant est

maximale  $I_0 = \frac{U}{R}$  et  $\varphi = 0$ .

D'autre part, à la résonance la tension aux bornes de l'inductance pure est élevée, elle a pour valeur :  $U_{L_0} = L\omega_0 I_0 = L\omega_0 \frac{U}{R}$ , ( $U_{L_0}$  est élevée car  $I_0 = \frac{U}{R}$  est max).

Soit  $U_{L_0} = Q U$  où :  $Q = \frac{L\omega_0}{R}$

Il en est de même si on prend la tension aux bornes de C, on aura à la résonance :

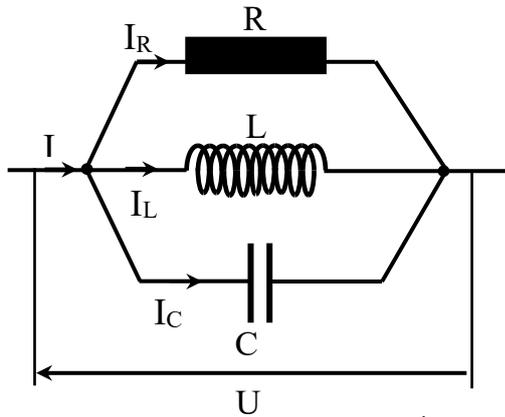
$$U_{C_0} = I_0 Z_C = I_0 (-jX_C) = -j \frac{I_0}{C\omega_0} = -j \frac{\frac{U}{R}}{C\omega_0} = -j \frac{U}{RC\omega_0} = -jQU$$

$$Q = \frac{1}{RC\omega_0}$$

Le coefficient **Q** représente le **Facteur de Qualité**, ou encore le **coefficient de surtension**, ( Un circuit résonant est essentiellement caractérisé par son facteur de qualité Q).

### 3-3.2) Montage RLC parallèle

En vertu du principe de dualité, l'étude de ce montage se ramène à celle du circuit série à condition de faire les permutations suivantes :



U en I ; R en  $\frac{1}{R}$  ; L en C ; Z en Y

En effet, dans le montage série on a :  $I = \frac{U}{Z}$

Donc dans le montage parallèle on aura :

$U = \frac{I}{Y}$ . L'admittance du circuit est alors :

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + j \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)$$

A la résonance quand  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , l'admittance du circuit est minimale  $Y_0 = \frac{1}{R}$ .

Pour la pulsation  $\omega_0$  la tension est maximale  $U_0 = \frac{I}{Y_0} = R I$ .

D'autre part à la résonance le courant aux bornes du condensateur est élevé, et a pour valeur  $I_{C_0} = C \omega_0 U_0 = R C \omega_0 I$ , soit  $I_{C_0} = Q' I$  où  $Q' = R C \omega_0$

Le coefficient **Q'** représente le **Facteur de Qualité**, ou encore le **coefficient de surintensité**.

### CHAPITRE 3

## RESEAUX LINEAIRES

## 4.1) Définitions

Un réseau électrique linéaire est un ensemble de dipôles linéaires, reliés par des conducteurs de résistance négligeable. On suppose que le réseau contient au moins un générateur.

Un réseau est constitué de  $b$  « branches » connectées par  $n$  « nœuds » et formant  $m$  « mailles ».

- ▶ Un **nœud** est un point de jonction de plusieurs conducteurs.
- ▶ Une **branche** est une portion de circuit entre deux nœuds.
- ▶ Une **maille** est un parcours fermé, constitué de branches et ne passant qu'une seule fois par un nœud donné.

### EXEMPLES.

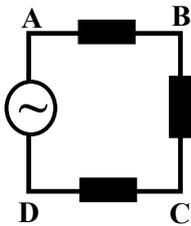


Figure.4-1a

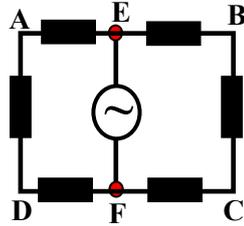


Figure.4-1b

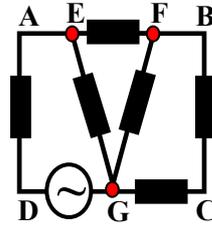


Figure.4-1c

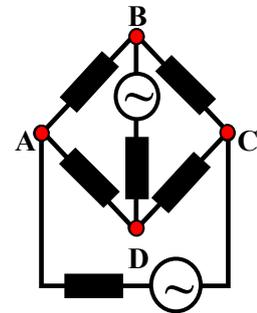


Figure.4-1d

Figure.4-1a: Pour ce circuit, on a :  $b = 1$ ,  $n = 0$ ,  $m = 1$ .

Figure.4-1b :  $b = 3$ , EADF, EF, EBCF.

$n = 2$ , E et F.

$m = 2$ , AEFDA, EBCFE.

Figure.4-1c:  $b = 5$ , EADG, EF, EG, FG, FBCG.

$n = 3$ , E, F, G.

$m = 3$ , EADGE, EFGE, FBCGF.

Figure.4-1d:  $b = 6$ , AB, BC, CD, DA, BD, AC.

$n = 4$ , A, B, C, D.

$m = 3$ , ABDA, BCDB, ADCA.

## 4.2) Réseaux en régime permanent

### 4.2-1) Lois de Kirchoff

Connaissant les f.e.m. des générateurs et les résistances du réseau, résoudre celui-ci c'est déterminer l'intensité du courant qui circule dans chacune des branches.

### 4.2-2) Méthode générale de résolution

#### 4.2-2a) Méthode des mailles indépendantes

Soit un réseau linéaire comprenant  $b$  branches, donc  $b$  courants inconnus à calculer. Ce réseau contient aussi  $n$  nœuds. Donc le nombre de mailles qu'il faut étudier est:  $m = b - (n - 1)$  où l'on associe pour chaque maille sa propre équation.

On peut alors en appliquant les lois de Kirchoff calculer les courants propres pour chaque maille, pour enfin déduire les courants de branches.

La Loi des Mailles indépendantes s'énonce ainsi :

**La maille d'indice  $k$  contient  $p$  branches. La différence de potentiel entre les extrémités de la branche  $j$  s'écrit  $U_j^k$ .**

Comme la maille constitue un parcours fermé, on a (seconde loi de Kirchhoff) :

$$\sum_{j=1}^p U_j^k = 0$$

La loi des mailles peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\sum_{j=1}^p E_j^k = \sum_{j=1}^p R_j^k I_j^k$$

Où  $E$  est la force électromotrice de générateur. Les sommes sont des sommes algébriques.

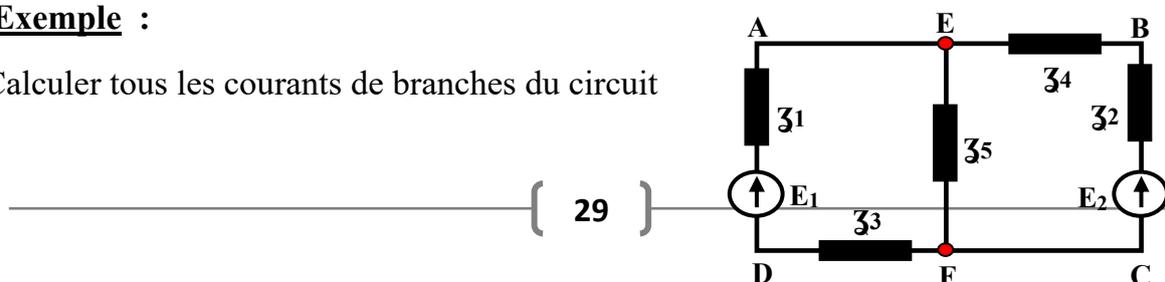
### Méthode générale de résolution

Après avoir transformé en sources de tension tous les générateurs de courants, on détermine les impédances des différentes branches, puis on fait apparaître dans le circuit, des mailles que l'on peut traiter isolément ; on les appelle : **mailles indépendantes**.

La méthode la plus rationnelle consiste à faire le choix d'un sens de parcours d'un courant sur la maille étudiée (choix arbitraire), appelé **courant de maille** et à fixer pour chaque branche le courant correspondant. La f.e.m. d'un générateur est comptée avec le signe de la borne par laquelle entre le **courant de maille** (courant continu). En courant alternatif la f.e.m. d'un générateur est comptée positive lorsque le courant débité par celui-ci et le **courant de maille** ont même sens. Les d.d.p. aux bornes des résistances sont positives si le courant dans la branche a le même sens que celui du **courant de maille** et négatives dans le cas contraire. Si à l'issue du calcul, on obtient pour le courant de maille une valeur négative, ceci est du principalement au choix arbitraire du courant de maille.

#### Exemple :

Calculer tous les courants de branches du circuit

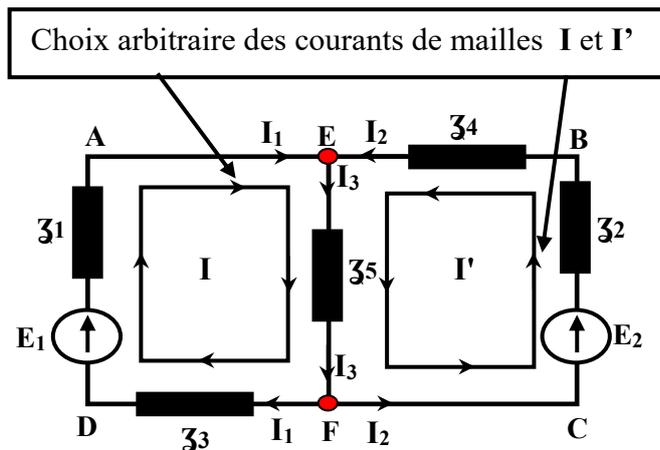


de la figure en face.

### Solution

Dans ce réseau on a :

$$\left. \begin{array}{l} n = 2, (E \text{ et } F) \\ b = 3, (EADF, EF \text{ et } EBCF) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m = 3 - (2 - 1) = 2 \\ \text{maille EADFE} \\ \text{maille EBCFE} \end{array}$$



Écrivons les équations de mailles en utilisant :

$$\sum_{j=1}^p E_j^k = \sum_{j=1}^p R_j^k I_j^k$$

maille EADFE :

$$E_1 = z_1 I + z_5 (I + I') + z_3 I$$

maille EBCFE :

$$E_2 = z_2 I' + z_4 I' + z_5 (I' + I)$$

$$E_1 = (z_1 + z_3 + z_5) I + z_5 I'$$

$$E_2 = z_5 I + (z_2 + z_4 + z_5) I'$$

La résolution de ce système s'effectue de deux façons, la première consiste à calculer  $I$  et  $I'$  par substitution. Quant à la deuxième, elle utilise le déterminant comme outil de calcul pour calculer  $I$  et  $I'$  ( c'est la méthode de Kramer ), cette méthode est privilégiée lorsqu'on a un système à trois équations et plus, ce qui n'empêche pas de l'utiliser même pour les système à deux équations, chose qu'on va appliquer.

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_3 + z_5 & z_5 \\ z_5 & z_2 + z_4 + z_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ I' \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \frac{\Delta_{\mathbf{I}}}{\Delta_{\mathbf{z}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{I}' = \frac{\Delta_{\mathbf{I}'}}{\Delta_{\mathbf{z}}} \quad \text{où}$$

$$\Delta_{\mathbf{I}} = \begin{vmatrix} E_1 & \mathfrak{z}_5 \\ E_2 & \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_4 + \mathfrak{z}_5 \end{vmatrix} ; \quad \Delta_{\mathbf{I}'} = \begin{vmatrix} \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_5 & E_1 \\ \mathfrak{z}_5 & E_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{\mathbf{z}} = \begin{vmatrix} \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_5 & \mathfrak{z}_5 \\ \mathfrak{z}_5 & \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_4 + \mathfrak{z}_5 \end{vmatrix}$$

Les courants de branches se déduisent des courants de mailles, en effet :

$$I_1 = I ; I_2 = I' \quad \text{et} \quad I_3 = I + I'$$

vu que les courants de branches ainsi que les courants de mailles ont même sens.

#### 4.2-2b) Méthode des nœuds

Le nœud d'indice k est la jonction de p branches (d'indice j) parcourues par des courants  $I_j^k$ . La loi de conservation de l'électricité (première loi de Kirchhoff) s'écrit sous la forme algébrique suivante :

$$\boxed{\sum_{j=1}^p I_j^k = 0}$$

Ce deuxième procédé de calcul est une conséquence du principe de dualité . En effet par dualité , la loi des mailles (  $\sum U = 0$  ) devient la loi des nœuds (  $\sum I = 0$  ), les générateurs de tension se transforment en générateurs de courant et les impédances deviennent des admittances. Aussi, pour appliquer cette deuxième méthode, faut-il, en premier lieu, remplacer les sources de tensions par des sources de courants et les impédances par des admittances. On choisi alors un nœud du réseau comme potentiel de référence (en générale potentiel zéro) et l'on désigne par  $V_1, V_2...$  les potentiels des différents nœuds du réseau. On écrit ensuite que la somme vectorielle des courants est nulle aux différents nœuds (  $\sum I = 0$  ) et l'on obtient autant de relations indépendantes qu'il y a de potentiels à calculer. Connaissant ces potentiels, il est facile d'en déduire les d.d.p. entre deux nœuds.

$$U_{mn} = V_m - V_n$$

Toutefois avant de faire un exemple il est impératif de donner un rappel sur la méthode de transformation des sources de tension en sources de courant et inversement.

#### 4.2-2c) Transformation de source

Cette méthode permet de transformer une source de tension ayant une résistance en série en une source de courant ayant une résistance en parallèle. La transformation de source est donnée à la figure.4.2 . Pour que les deux circuits soient équivalents, il faut qu'un voltmètre mesure la même tension entre les bornes a et b et qu'un ampèremètre mesure le même courant qui sort de la borne a (pour entrer dans la borne b). Si on place un voltmètre aux bornes du circuit de gauche, la tension mesurée sera  $U_s$

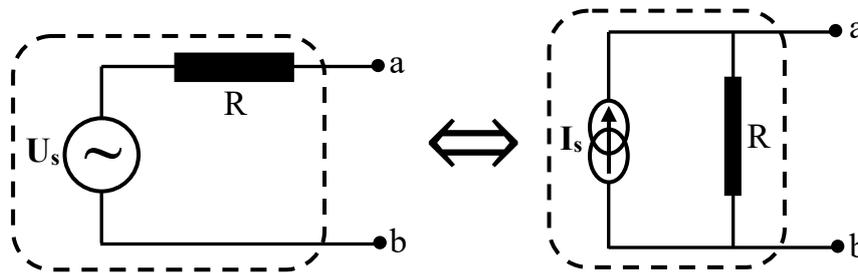


Figure.4.2

Un ampèremètre placé entre a et b agit comme un court-circuit, et donc un courant ayant une valeur de

$$I = \frac{U_s}{R} \dots \dots \dots (1)$$

Pour que le circuit de droite soit équivalent, il faut que la tension et le courant mesurés soient les mêmes. Si on place un voltmètre entre les bornes a et b du circuit de droite, la tension mesurée est  $U_{ab} = I_s \times R$ . Pour que ce soit équivalent, il faut que :

$$I_s = \frac{U_s}{R} \dots \dots \dots (2)$$

Cette dernière équation permet de transformer une source de tension en une source de courant, et vice-versa. La résistance R est la même dans les deux cas.

#### Exemple.

Calculer la puissance dans la source de 6V du circuit de la figure.4.3.

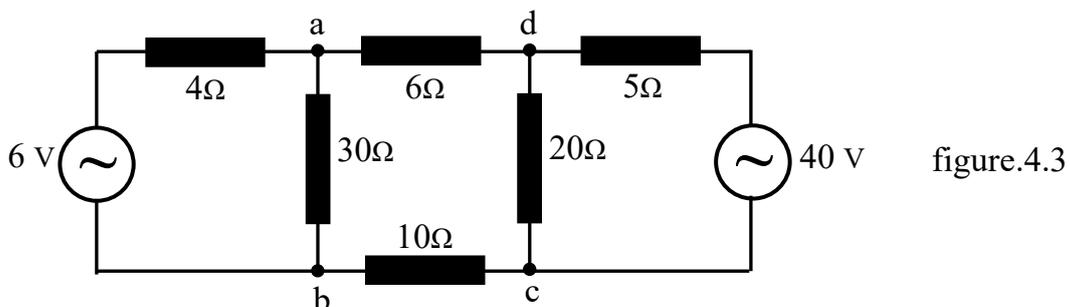
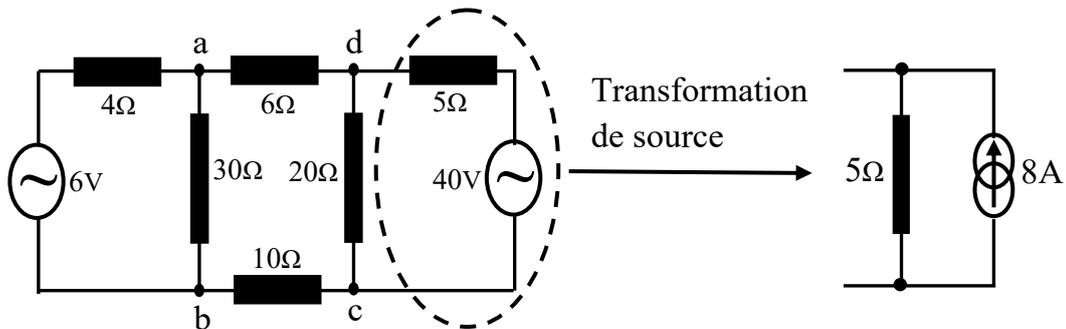


figure.4.3

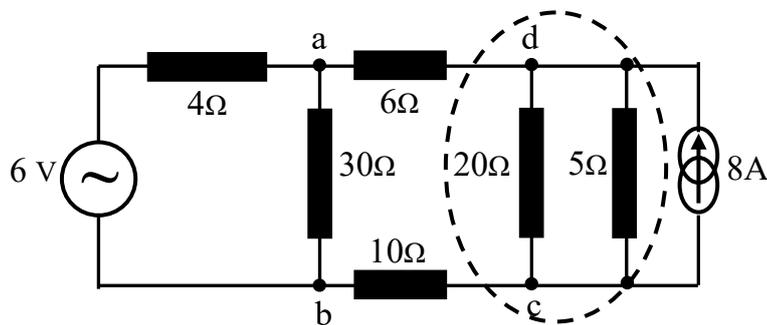
#### Solution

La seule chose qui nous intéresse, c'est la source de 6V et le courant qui y sort (entre), parce qu'on veut calculer la puissance. On cherche donc à transformer la source de 40V et tout simplifier le plus possible vers la source de 6V. transformer la source de 40V en une source de courant, ceci permettra d'avoir une résistance en parallèle avec la résistance de 20Ω. On effectue la transformation :



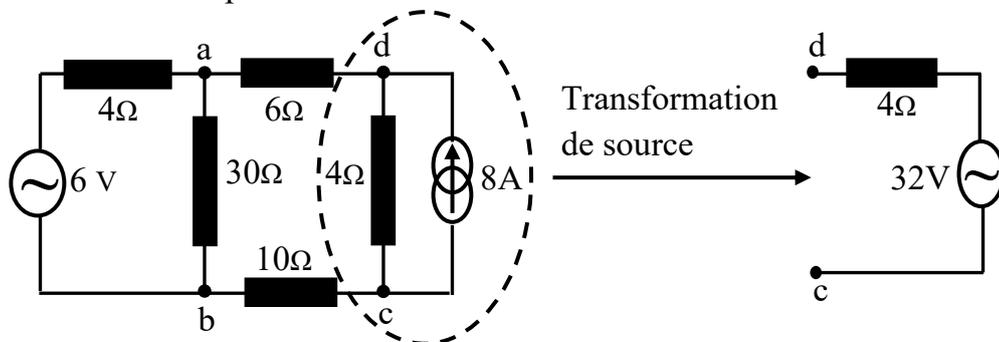
La source de courant a une valeur de :  $\frac{40}{5} = 8A$

On peut continuer à simplifier le circuit. La résistance de 5Ω est en parallèle avec la résistance de 20Ω. La résistance équivalente en parallèle est :



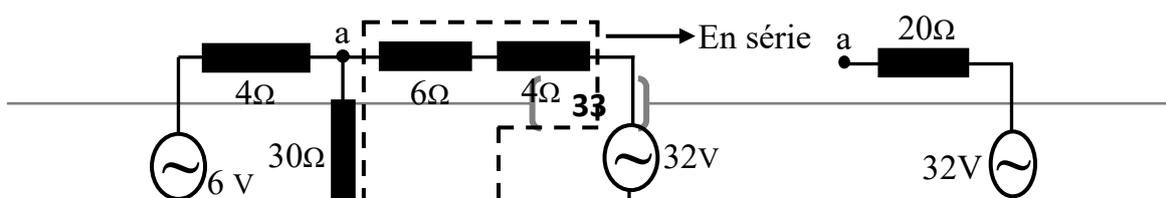
$$R_{\text{eq}} = \frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4\Omega$$

On peut continuer la simplification en effectuant une autre transformation de source.

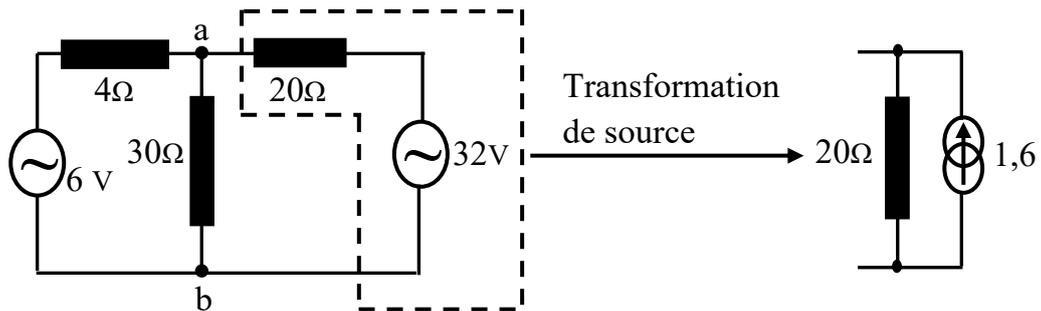


La source de tension aura une valeur de  $(8) \times (4) = 32V$ .

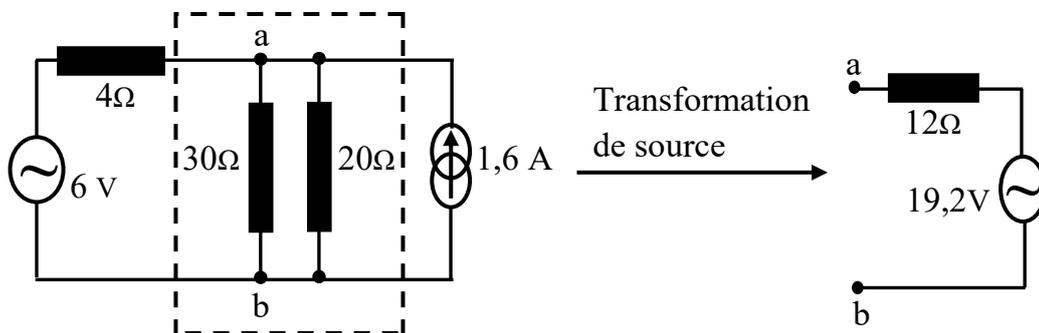
Avec cette transformation, on a maintenant 3 résistances en série.



Après cette simplification, on peut effectuer une autre transformation de source.



Et encore une fois, on a deux résistances en parallèle qu'on remplacera par leur résistance équivalente  $R_{\text{eq}} = 12\Omega$ , puis on effectue la transformation de source.



On obtient finalement :

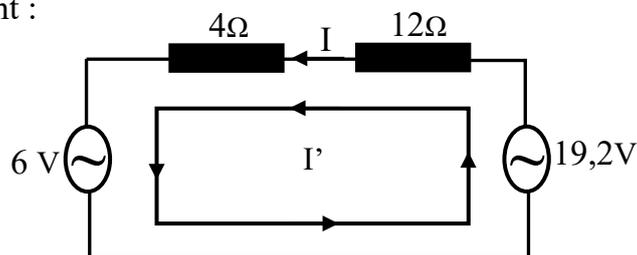


Figure.4.4

On peut maintenant faire l'analyse de ce circuit. On applique la loi de Kirchhoff des tensions (loi des mailles) pour la boucle, avec les conventions habituelles (fig.4.4):

$$6 + (4 + 12) I' - 19.2 = 0$$

ce qui donne :  $I' = 0,825$  A. Vu que  $I$  et  $I'$  ont même sens donc :  $I = I'$ , et La puissance de la source de 6V est :

$$p = U I = (6)(0.825) = 4.95 \text{ W}$$

La source consomme 4.95W.

Plusieurs des simplifications montrées auraient pu être effectuées en une étape au lieu de 2 ou 3. Elles ont été démontrées ici pour aider a bien comprendre la méthode, et le flot d'idées utilisé pour résoudre ce circuit.

### **\*) Cas particulier**

Il existe deux cas particuliers lorsqu'on fait des transformations de source. Pour le premier cas, on a une résistance ( $R_p$ ) en parallèle avec la source de tension. On peut ignorer cette résistance parallèle, comme a la figure.4.5.

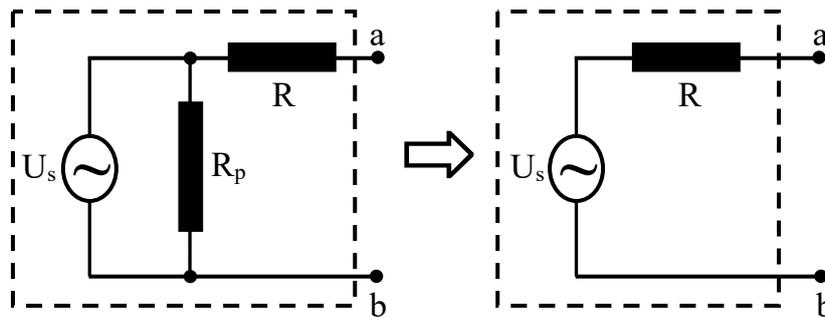


Figure.4.5

Pour le deuxième cas, il s'agit d'une résistance en série avec la source de courant. On peut aussi ignorer la résistance série, comme a la figure .4.6.

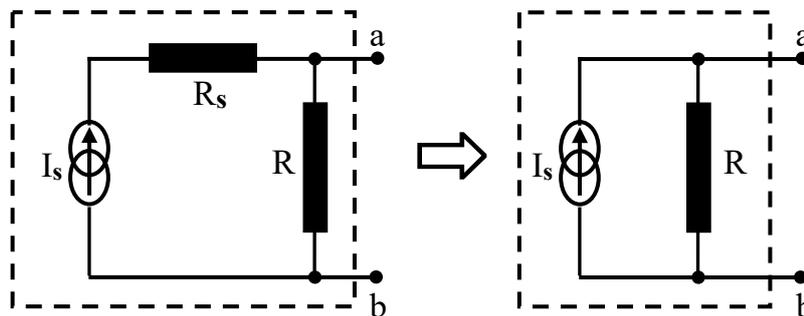


Figure.4.6

Pour les deux cas particuliers, un voltmètre place entre a et b mesurera la même tension, et un ampèremètre place entre a et b mesurera le même courant.

Exemple.

Calculer par la méthode des nœuds les courants de branches du circuit de la figure.4.7.

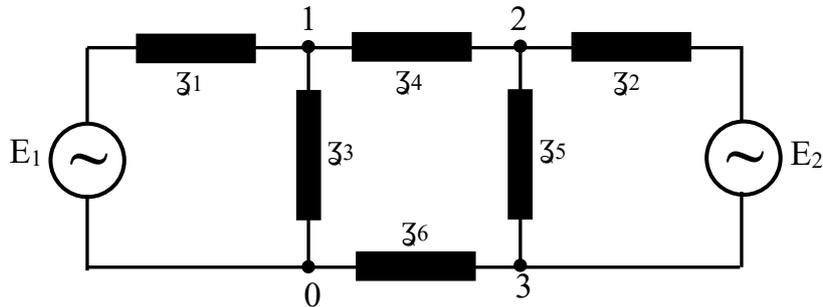


figure.4.7

Solution.

Remplaçons les deux générateurs de tensions par des sources de courant et les impédances par des admittances (fig.4.8a). On peut ensuite regrouper en une seule admittance deux admittances en parallèle (fig.4.8b).

Prenons comme potentiel zéro le nœud 0. Écrivons successivement la loi des nœuds aux nœuds 1, 2 et 3 il vient :

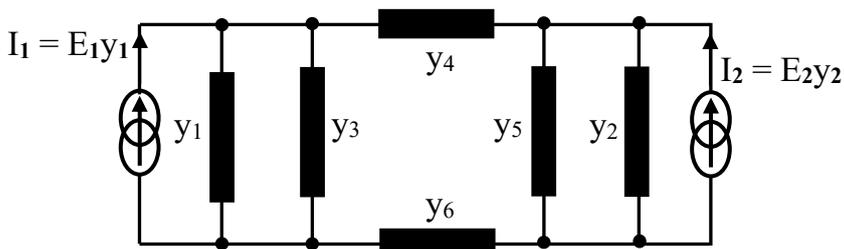


Figure.4.8a

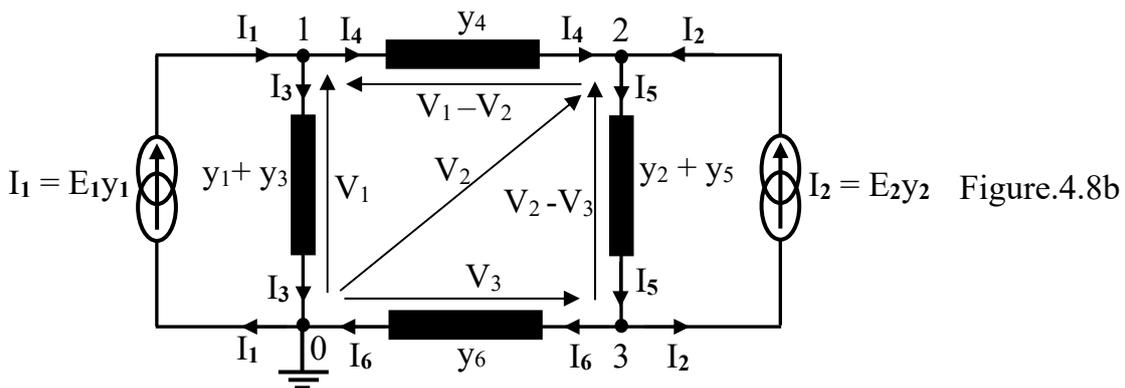


Figure.4.8b

Nœud 1 :  $I_1 = I_3 + I_4$

Nœud 2 :  $I_2 = I_5 - I_4$

Nœud 3 :  $- I_2 = I_6 - I_5$

Écrivons ces relations en fonction des tensions et admittances:

$$\begin{aligned} E_1 y_1 &= (y_1 + y_3) V_1 + y_4 (V_1 - V_2) \\ E_2 y_2 &= (y_2 + y_5) (V_2 - V_3) - y_4 (V_1 - V_2) \\ - E_2 y_2 &= y_6 V_3 - (y_2 + y_5) (V_2 - V_3) \end{aligned}$$

On peut encore écrire :

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{y}_1 = (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_4) \mathbf{V}_1 - \mathbf{y}_4 \mathbf{V}_2 + \mathbf{0}$$

$$\mathbf{E}_2 \mathbf{y}_2 = -\mathbf{y}_4 \mathbf{V}_1 + (\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_4 + \mathbf{y}_5) \mathbf{V}_2 - (\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_5) \mathbf{V}_3$$

$$-\mathbf{E}_2 \mathbf{y}_2 = \mathbf{0} - (\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_5) \mathbf{V}_2 + (\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_5 + \mathbf{y}_6) \mathbf{V}_3$$

Mettons ce système sous la forme matricielle, afin de pouvoir calculer les différentes tensions en utilisant le déterminant.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{E}_2 \mathbf{y}_2 \\ -\mathbf{E}_2 \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_4 & -\mathbf{y}_4 & 0 \\ -\mathbf{y}_4 & \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_4 + \mathbf{y}_5 & -(\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_5) \\ 0 & -(\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_5) & \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_5 + \mathbf{y}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{pmatrix}$$

Si l'on pose :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{11} &= \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_4 & \mathbf{y}_{12} &= \mathbf{y}_{21} = -\mathbf{y}_4 \\ \mathbf{y}_{22} &= \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_4 + \mathbf{y}_5 & \mathbf{y}_{23} &= \mathbf{y}_{32} = -(\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_5) \\ \mathbf{y}_{33} &= \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_5 + \mathbf{y}_6 & \mathbf{y}_{13} &= \mathbf{y}_{31} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

la matrice admittance sera :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} & \mathbf{y}_{13} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} & \mathbf{y}_{23} \\ \mathbf{y}_{31} & \mathbf{y}_{32} & \mathbf{y}_{33} \end{pmatrix}$$

On calcule les potentiels en utilisant le déterminant.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{E}_1 \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_{12} & \mathbf{y}_{13} \\ \mathbf{E}_2 \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_{22} & \mathbf{y}_{23} \\ -\mathbf{E}_2 \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_{32} & \mathbf{y}_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} \\ \mathbf{V}_2 &= \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{E}_1 \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_{13} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{E}_2 \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_{23} \\ \mathbf{y}_{31} & -\mathbf{E}_2 \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} \\ \mathbf{V}_3 &= \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} & \mathbf{E}_1 \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} & \mathbf{E}_2 \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_{31} & \mathbf{y}_{32} & -\mathbf{E}_2 \mathbf{y}_2 \end{vmatrix}}{\Delta} \\ \Delta &= \begin{vmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} & \mathbf{y}_{13} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} & \mathbf{y}_{23} \\ \mathbf{y}_{31} & \mathbf{y}_{32} & \mathbf{y}_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \mathbf{E}_1 \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{E}_2 \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{I}_3 &= (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_3) \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_4 &= \mathbf{y}_4 (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) \\ \mathbf{I}_5 &= (\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_5) (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3) \\ \mathbf{I}_6 &= \mathbf{y}_6 \mathbf{V}_3 \end{aligned}$$

### Remarque

On en déduit de cet exemple deux règles essentielles, et qui sont :

**1<sup>ère</sup> règle** : Si on regarde bien la matrice admittance ( $\Delta$ ) on remarque qu'elle est symétrique par rapport à la diagonale principale.

**2<sup>ème</sup> règle** : L'admittance  $y_{mm}$  est égale à la somme des admittances des branches qui aboutissent au nœud  $m$ . L'admittance  $y_{mn}$  est l'admittance changée de signe de la branche qui relie les nœuds  $m$  et  $n$ . Les admittances  $y_{mn}$  et  $y_{nm}$  sont égales.

### 4.2-3) Théorème de Thévenin

On considère un réseau linéaire qu'alimentent plusieurs générateurs de même fréquence. Proposons-nous de calculer le courant  $I$  dans l'une des branches du réseau, Prenons la branche AB du circuit de la figure.4.9.

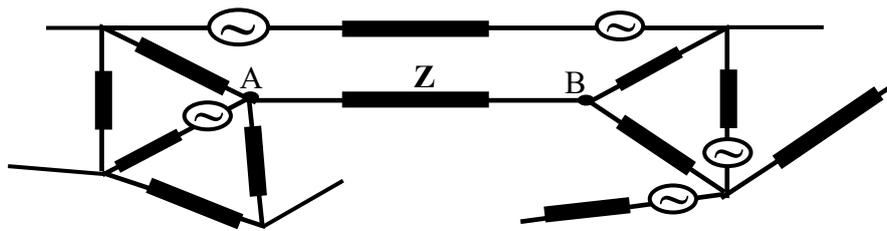


Figure .4.9

On procède alors en trois étapes :

**1<sup>ère</sup> étape** : On enlève la branche AB, puis on calcule la tension à vide entre les bornes A et B. Cette tension constitue la tension du générateur de Thévenin  $E_{Th}$ .

**2<sup>ème</sup> étape** : La branche AB étant toujours enlevée ou déconnectée, on court-circuite tous les générateurs de tension (les générateurs de courant sont remplacés par des circuits ouverts), et l'on calcule l'impédance équivalente du circuit entre les bornes A et B. Cette impédance constitue la résistance interne du générateur de Thévenin  $R_{Th}$ .

**3<sup>ème</sup> étape** : On peut alors remplacer l'ensemble du réseau de la figure.4.9 par un circuit simplifié (fig.4.10):

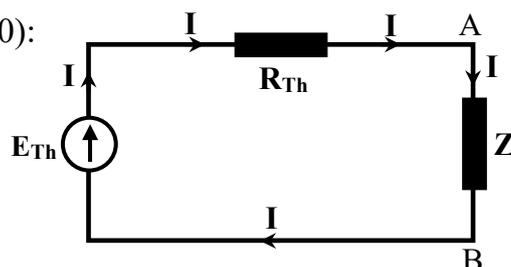
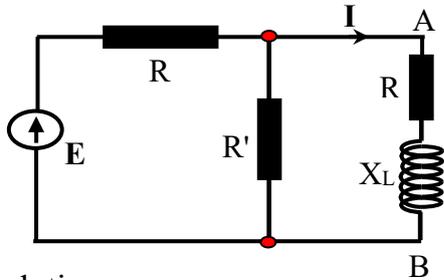


Figure.4.10

Ce qui nous permet alors de calculer aisément l'intensité du courant qui alimente la branche AB soit:

$$I = \frac{E_{Th}}{Z + R_{Th}}$$

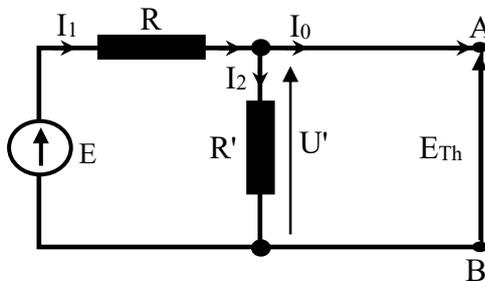
**Exemple**



Calculez l'intensité du courant **I** qui parcourt la bobine (L,R) ou la branche AB, en appliquant le théorème de Thévenin.

**Solution**

1<sup>ère</sup> étape : Calculons  $E_{Th}$ , pour cela supprimons la branche AB.



On a  $E_{Th} = U'$  ( circuit ouvert )  $U' = R'I_2$  mais  $I_2 = I_1$  vu que  $I_0 = 0$ , donc :  $E_{Th} = R' I_1$ .

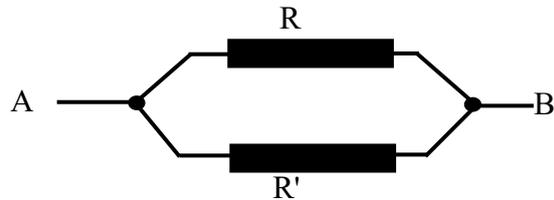
Déterminons  $I_1$  :

$$E = (R + R') I_1 \Rightarrow I_1 = E / (R + R')$$

Alors :  $E_{Th} = R' E / (R + R')$

2<sup>ème</sup> étape : Court-circuitons E et déterminons la résistance équivalente du circuit entre les bornes A et B, en maintenant toujours le circuit ouvert au niveau de la branche AB. ce qui constitue  $R_{Th}$ .

$$R_{Th} = \frac{R R'}{R + R'}$$



3<sup>ème</sup> étape : Circuit équivalent (fig.4.11) :

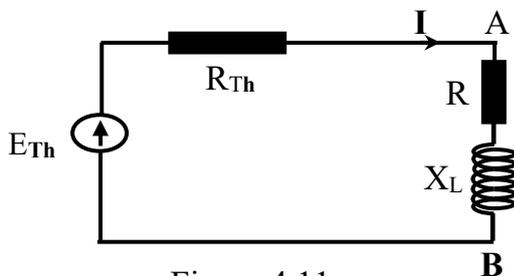


Figure.4.11

$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + Z_L} = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + (R + jX_L)}$$

$$I = \frac{R' E}{R(R + 2R') + j X_L (R + R')}$$

**4.2-4) Théorème de Norton**

Ce théorème est l'équivalent du théorème de Thévenin, et se réalise comme suit :

On se propose de calculer le courant  $I$  dans la branche AB du circuit de la figure.4.9.

**1<sup>ère</sup> étape** : Court-circuitons l'impédance  $Z$  ( $Z = 0$ ), puis calculons le courant de court-circuit  $I_{cc}$  circulant dans la branche AB, celui-ci représentera le courant de Norton  $I_N$  et sera le courant débité par le générateur de Norton (générateur de courant).

**2<sup>ème</sup> étape** : On calcule la résistance interne du générateur de Norton  $R_N$ , en procédant exactement de la même manière qu'avec  $R_{Th}$ .

**3<sup>ème</sup> étape** : On peut alors remplacer l'ensemble du réseau de la figure.4.9 par un circuit simplifié (fig.4.12) où :

$$\left. \begin{array}{l} U_{AB} = Z I \\ U_{AB} = R_N (I_N - I) \end{array} \right\} \Rightarrow Z I = R_N (I_N - I)$$

$$I = \frac{R_N}{R_N + Z} I_N$$

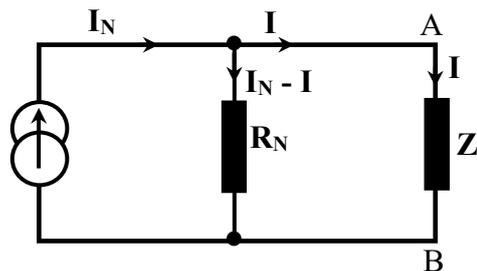


Figure.4.12

### Exemple

Calculez l'intensité du courant  $I$  qui circule dans la branche AB du circuit de la figure 4.13, en appliquant le théorème de Norton.

On donne :

$$R_1 = 1\Omega ; R_2 = 2\Omega ; R = 4\Omega ; E = 10\text{ V}$$

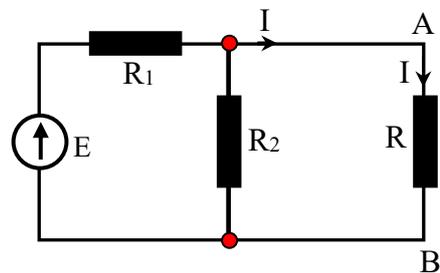
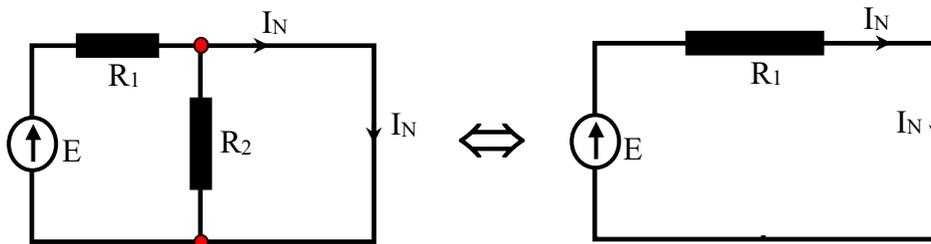


Figure.4.13

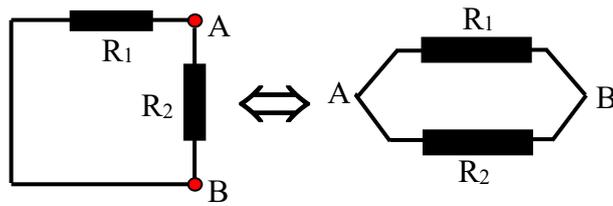
### Solution

**1<sup>ère</sup> étape** : Calculons  $I_N$ , pour cela court-circuitons la branche AB.



$$E = R_1 I_N \Rightarrow I_N = E / R_1 = 10 / 1 = 10\text{ A}$$

**2<sup>ème</sup> étape** : La valeur de  $R_N$  est obtenue de la même façon que  $R_{Th}$ . Ce qui nous donne le circuit suivant :



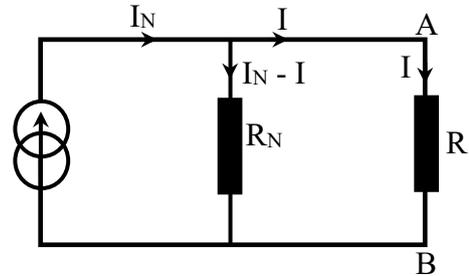
$$R_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_N = 0,66 \Omega$$

3<sup>ème</sup> étape : Circuit équivalent :

$$\left. \begin{array}{l} U_{AB} = R_N (I_N - I) \\ U_{AB} = R I \end{array} \right\} \Rightarrow R_N (I_N - I) = R I$$

$$I = \frac{R_N I_N}{R_N + R} \text{ Donc } I = 1,41 \text{ A}$$



Autre méthode de résolution qui consiste à considérer que la résistance  $R_1$  comme étant la résistance du générateur de Thévenin qui alimente le récepteur relié aux bornes A et B (deux branches en parallèle) (fig.4.13a). On peut alors appliquer le théorème de Norton, ce qui donne le schéma suivant (fig.4.13b).

Où :  $I_1 = E / R_1 = 10 \text{ A}$

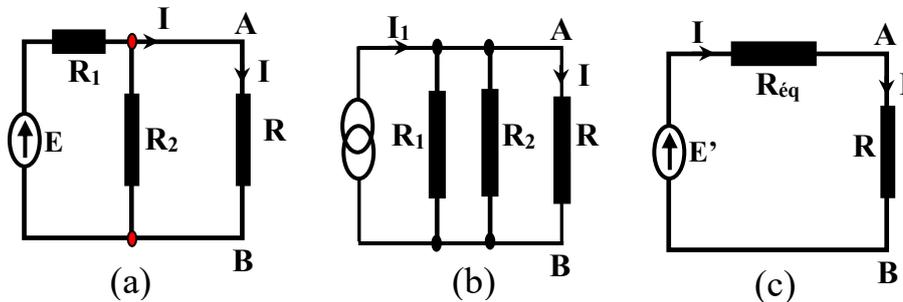


Figure.4.13

Groupons les deux résistances  $R_1$  et  $R_2$ , on obtient une résistance équivalente unique de valeur  $R_{\text{éq}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 0,66 \Omega$ , puis revenons au générateur de tension (fig.4.13c). Il est alors facile de calculer le courant demandé, avec  $E' = R_{\text{éq}} \times I_1 = 6,6 \text{ V}$

$$I = \frac{E'}{R_{\text{éq}} + R} = \frac{6,6}{4,66} = 1,41 \text{ A}$$

#### 4.2-5) Théorème de superposition

L'intensité du courant dans une branche d'un réseau comprenant plusieurs générateurs de fréquences différentes est la somme des intensités, que ferait passer, dans cette

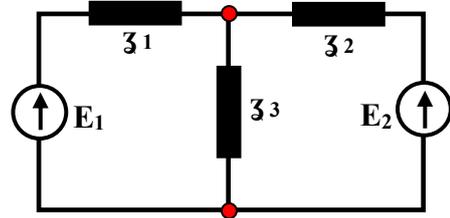
branche, chaque générateur considéré isolément comme actif, les autres générateurs du réseau étant alors passifs. ( Rendre passif un générateur, c'est le court-circuité ) .

**Exemple :**

Déterminez le courant  $I$  qui circule dans l'impédance  $z_3$  du circuit en face.

On donne :  $E_1 = 10V$  et  $E_2 = 20V$

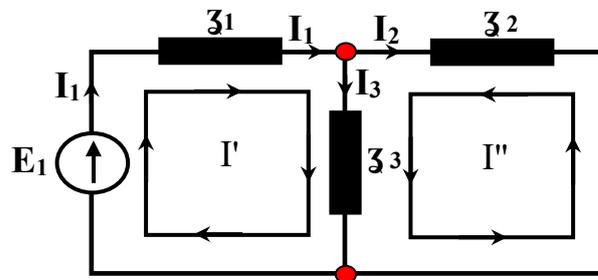
$z_1 = 10\Omega$  ;  $z_2 = 15\Omega$  et  $z_3 = 5\Omega$



**Solution**

on remplace successivement chaque générateur par un court-circuit.

1) Soit  $I_3$  le courant qui circule dans  $z_3$  quand  $E_1 \neq 0V$  et  $E_2 = 0V$  (  $E_2$  est court-circuité). On dispose de deux mailles, donc deux équations.



$$\left. \begin{aligned} E_1 &= z_1 I' + z_3 (I' + I'') \\ 0 &= -z_2 I'' + z_3 (I'' + I') \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} E_1 &= (z_1 + z_3) I' + z_3 I'' \\ 0 &= z_3 I' + (-z_2 + z_3) I'' \end{aligned}$$

$$10 = 15 I' + 5 I''$$

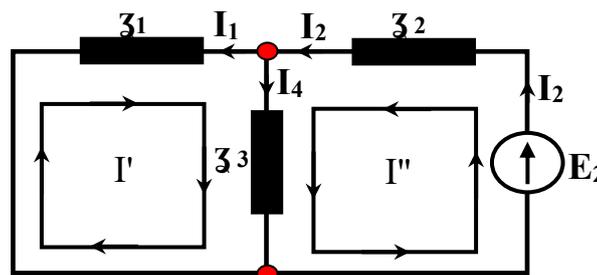
$0 = 5 I' - 10 I'' \Rightarrow I' = ( 10 / 5 ) I''$ , qu'on remplace dans la première équation :

$$I'' = (10 / 35) = 0,28 \text{ A} \text{ et } I' = 0,56 \text{ A.}$$

Finalemment :

$$I_3 = I' + I'' = 0,56 + 0,28 = 0,84 \text{ A}$$

2) Soit  $I_4$  le courant qui circule dans  $z_3$  quand  $E_1 = 0V$  (  $E_1$  est court-circuité) et  $E_2 \neq 0V$ . On dispose toujours de deux mailles, donc deux équations.



$$\left. \begin{array}{l} 0 = -z_1 I' + z_3 (I' + I'') \\ E_2 = z_2 I'' + z_3 (I' + I'') \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = (-z_1 + z_3) I' + z_3 I'' \\ E_2 = z_3 I' + (z_2 + z_3) I'' \end{array}$$

$0 = -5 I' + 5 I'' \Rightarrow I' = (5 / 5) I'' \Rightarrow I' = I''$ , qu'on remplace dans la seconde équation :

$$20 = 5 I' + 20 I'' \quad I'' = (20 / 25) = 0,8 \text{ A et donc } I' = 0,8 \text{ A.}$$

Il en résulte le courant dans  $z_3$ :  $I_4 = I' + I'' = 1,6 \text{ A}$

Finalement :  $I = I_3 + I_4 = 2,44 \text{ A}$

#### 4.2-6) Théorème de Kennelly

La transformation suivante est parfois utilisée pour la simplification de circuits comportant des dérivations.

##### \* Équivalence étoile-triangle

Les deux circuits de la figure 4.14, sont équivalents si les valeurs de leurs impédances sont liées par les relations indiquées ci-dessous.

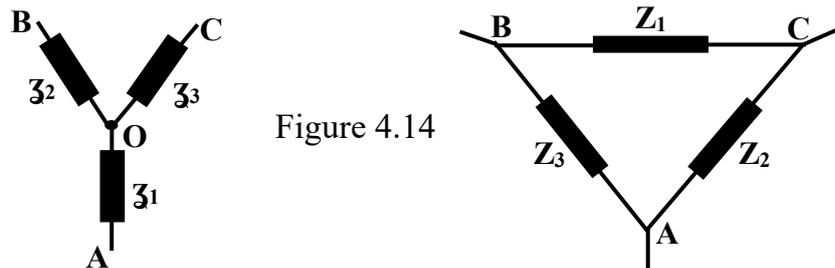


Figure 4.14

Le passage de la structure triangle (ABC) à la structure étoile (OABC), c.à.d. le calcul de  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  en fonction de  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$ , s'obtient comme suit :

Si on déconnecte le point C, il doit y avoir égalité des impédances entre A et B.

$$Z_{AB} = z_1 + z_2 = Z_3 // (Z_1 + Z_2).$$

Si on déconnecte le point B, il doit y avoir égalité des impédances entre A et C.

$$Z_{AC} = z_1 + z_3 = Z_2 // (Z_1 + Z_3).$$

Si on déconnecte le point A, il doit y avoir égalité des impédances entre B et C.

$$Z_{BC} = z_2 + z_3 = Z_1 // (Z_3 + Z_2).$$

On en déduit les trois égalités suivantes :

$$Z_{AB} = z_1 + z_2 = \frac{Z_3 Z_1 + Z_3 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3}; \quad Z_{AC} = z_1 + z_3 = \frac{Z_2 Z_1 + Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}; \quad Z_{BC} = z_2 + z_3 = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

En sommant les 2 premières égalités et en retranchant la 3<sup>ème</sup>, on calcule  $z_1$ , puis en sommant la première et la troisième égalité et en retranchant la 2<sup>ème</sup> on calcule  $z_2$  et

enfin en sommant la deuxième et la troisième égalité et en retranchant la 1<sup>ère</sup> on calcule  $\mathfrak{z}_3$  pour trouver finalement:

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} ; \mathfrak{z}_2 = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} ; \mathfrak{z}_3 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

**\* Équivalence triangle- étoile**

C'est la transformation inverse, c.-à-d. passage de la structure étoile (OABC) à la structure triangle (ABC), c.à.d. le calcul de  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$ , en fonction de  $\mathfrak{z}_1$ ,  $\mathfrak{z}_2$  et  $\mathfrak{z}_3$  pour cela on procède de la façon suivante :

**on relie B et C :**  $Z_{A-BC} = \mathfrak{z}_1 + (\mathfrak{z}_2 // \mathfrak{z}_3) = Z_2 // Z_3$

**on relie A et B :**  $Z_{C-AB} = \mathfrak{z}_3 + (\mathfrak{z}_1 // \mathfrak{z}_2) = Z_1 // Z_2$

**on relie A et C :**  $Z_{B-AC} = \mathfrak{z}_2 + (\mathfrak{z}_1 // \mathfrak{z}_3) = Z_1 // Z_3$

l'impédance inverse entre A et BC est alors :

$$\frac{1}{Z_{A-BC}} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \frac{\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3}{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_2 \mathfrak{z}_3}$$

l'impédance inverse entre B et AC est alors :

$$\frac{1}{Z_{B-AC}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_3} = \frac{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_3}{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_2 \mathfrak{z}_3}$$

l'impédance inverse entre C et AB est alors :

$$\frac{1}{Z_{C-AB}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_2 \mathfrak{z}_3}$$

Et l'on calcule:  $\frac{1}{Z_{B-AC}} + \frac{1}{Z_{C-AB}} - \frac{1}{Z_{A-BC}}$  pour trouver  $Z_1$ ,

ensuite :  $\frac{1}{Z_{A-BC}} + \frac{1}{Z_{C-AB}} - \frac{1}{Z_{B-AC}}$  pour trouver  $Z_2$ ,

et enfin :  $\frac{1}{Z_{A-BC}} + \frac{1}{Z_{B-AC}} - \frac{1}{Z_{C-AB}}$  pour trouver  $Z_3$ .

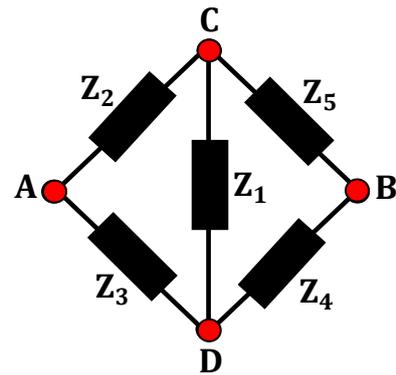
On déduit Alors :

$$Z_1 = \frac{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_2 \mathfrak{z}_3}{\mathfrak{z}_1} ; Z_2 = \frac{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_2 \mathfrak{z}_3}{\mathfrak{z}_2} ; Z_3 = \frac{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_2 \mathfrak{z}_3}{\mathfrak{z}_3}$$

**Exemple**

Étant donné le circuit ci-contre, calculez l'impédance équivalente entre les bornes A et B. On donne :

$$Z_1 = 1\Omega ; Z_2 = 2\Omega ; Z_3 = 3\Omega ; Z_4 = 4\Omega ; Z_5 = 5\Omega$$



**Solution**

Pour calculer  $Z_{\text{éq}}$  entre A et B, transformons le triangle BCD en étoile OBCD (fig.4.15). pour cela utilisons le théorème de Kennely.

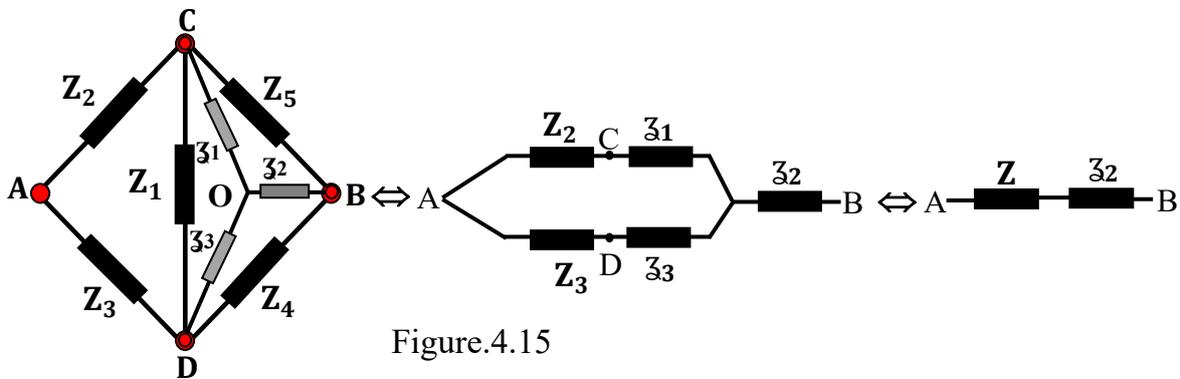


Figure.4.15

$$Z_{AB} = Z_{\text{éq}} = Z + z_2 ; \text{ où } Z = \frac{(z_1 + Z_2)(z_3 + Z_3)}{(z_1 + Z_2) + (z_3 + Z_3)}$$

$$\text{Mais : } z_1 = \frac{Z_1 Z_5}{Z_1 + Z_4 + Z_5} ; z_2 = \frac{Z_4 Z_5}{Z_1 + Z_4 + Z_5} ; z_3 = \frac{Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_4 + Z_5}$$

$$z_1 = 0,125\Omega ; z_2 = 0,09\Omega ; z_3 = 0,375\Omega$$

$$\text{D'où : } Z = 0,37\Omega$$

$$\text{et donc : } \boxed{Z_{\text{éq}} = 0,37 + 0,09 = 0,46\Omega}$$

NB : Le choix du triangle BCD est arbitraire, on peut aussi prendre le triangle ACD.

## LES QUADRIPOLES

### 5.1) Définition

Un quadripôle est un composant ou un circuit à deux entrées et deux sorties, qui permet le transfert d'énergie entre deux dipôles, donc un organe de transmission. On distingue deux types de quadripôles :

- ▶ Les quadripôles **actifs** : s'ils contiennent en plus des éléments R, L, C, des sources liées.
- ▶ Les quadripôles **passifs** : s'ils ne contiennent que des éléments R, L, C.

### 5.2) Représentation



Figure.5.1

### 5.3) Convention de signe

#### 5.3-1) système récepteur

Le courant  $I_2$  circule dans le quadripôle selon le sens entrant, la tension  $U_2$  positive tend à faire circuler le courant dans le quadripôle. Ce système convient parfaitement bien pour certaines études : Tubes à vide, transistors.



Figure.5.2a

#### 5.3-2) système générateur

Le courant  $I_2$  circule dans le quadripôle selon le sens sortant, la tension  $U_2$  positive tend à faire circuler le courant en dehors du quadripôle. En revanche ce système convient pour l'étude des filtres où les quadripôles sont branchés en cascade.

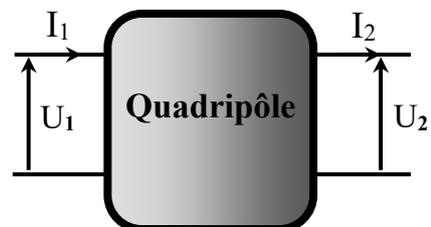


Figure.5.2b

### 5.4) Grandeurs caractéristiques

Le quadripôle est un organe de transmission de signal entre les grandeurs

caractérisant ce signal à l'entrée, c'est-à-dire  $U_1$  et  $I_1$ , et les grandeurs caractérisant ce signal à la sortie c'est-à-dire  $U_2$  et  $I_2$ . Il suffira d'étudier d'une part les grandeurs caractérisant ce signal à l'entrée, c'est-à-dire la tension d'entrée  $U_1$  et le courant d'entrée  $I_1$ , d'autre part les grandeurs caractérisant ce signal à la sortie, c'est-à-dire la tension de sortie  $U_2$  et le courant de sortie  $I_2$ .

Donc les grandeurs caractéristiques d'un quadripôle sont :

$$U_1, I_1, U_2 \text{ et } I_2.$$

### 5.5) Paramètres d'un quadripôle linéaire

Si le quadripôle est linéaire, les quatre grandeurs  $U_1$ ,  $I_1$ ,  $U_2$  et  $I_2$  sont liées par des relations linéaires, c'est-à-dire que, si l'on choisit deux de ces grandeurs comme fonctions et les deux autres comme variables, chaque grandeur fonction sera reliée aux deux variables par une relation linéaire.

**Exemple :** Choisissons  $U_1$  et  $U_2$  comme fonction,  $I_1$  et  $I_2$  comme variables. Si le quadripôle est linéaire chaque grandeur fonction sera reliée aux deux variables par une relation linéaire. Nous pourrions alors a priori écrire :

$$U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$U_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

Les coefficients  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$ ,  $Z_{21}$  et  $Z_{22}$  constituent un groupe de quatre paramètres du quadripôle. Si nous avons fait un autre choix des deux grandeurs fonctions, nous aurions obtenus un autre groupe de quatre paramètres, mais un groupe quelconque suffit à préciser le rôle d'un quadripôle.

Notons que la détermination de ces paramètres est en général, aisée et peut même résulter des mesures sans qu'il soit nécessaire de connaître la structure du quadripôle.

Il existe six groupes de paramètres.

#### 5.5-1) Les six groupes de paramètres

Un quadripôle est caractérisé par quatre grandeurs liées par des relations linéaires de telle sorte qu'il existe six possibilités d'exprimer deux de ces grandeurs en fonction des deux autres. Il y a donc six groupes possibles de quatre paramètres (Tab.5.1).

**TABLEAU 5.1**

| Fonctions            | Vari-<br>-<br>ables   | Équations du<br>quadripôle   | Écriture matricielle   | Appellation<br>matricielle   |
|----------------------|-----------------------|--|--|--|
| $U_1$<br>et<br>$U_2$ | $I_1$<br>et<br>$I_2$  | $U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$<br>$U_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$ | $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} =$<br>matrice impédance          |
| $I_1$<br>et<br>$I_2$ | $U_1$<br>et<br>$U_2$  | $I_1 = y_{11} U_1 + y_{12} U_2$<br>$I_2 = y_{21} U_1 + y_{22} U_2$ | $\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} =$<br>matrice Admittance         |
| $U_1$<br>et<br>$I_2$ | $I_1$<br>et<br>$U_2$  | $U_1 = h_{11} I_1 + h_{12} U_2$<br>$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} U_2$ | $\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} =$<br>matrice Hybride            |
| $I_1$<br>et<br>$U_2$ | $U_1$<br>et<br>$I_2$  | $I_1 = g_{11} U_1 + g_{12} I_2$<br>$U_2 = g_{21} U_1 + g_{22} I_2$ | $\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} =$<br>matrice Hybride<br>inverse |
| $U_1$<br>et<br>$I_1$ | $U_2$<br>et<br>$-I_2$ | $U_1 = A U_2 - B I_2$<br>$I_1 = C U_2 - D I_2$                     | $\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$                    | $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} =$<br>matrice Transfert<br>(Chaîne)                  |
| $U_2$<br>et<br>$I_2$ | $U_1$<br>et<br>$-I_1$ | $U_2 = A' U_1 - B' I_1$<br>$I_2 = C' U_1 - D' I_1$                 | $\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$                | $\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} =$<br>matrice Transfert<br>inverse               |

**5.5-2) Nature des paramètres**

La nature de chacun des paramètres peut être facilement déterminée à partir des équations du quadripôle.

**Exemple :** En se reportant à l'équation  $U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$ , on voit que :

$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1}$ , pour  $I_2 = 0$ .  $Z_{11}$  est donc l'impédance d'entrée du quadripôle pour la sortie ouverte ( $Z_2 = \infty$ ).

De façon générale, les paramètres  $Z$ ,  $y$ ,  $h$  et  $g$  sont des fonctions de transfert direct ou inverse du quadripôle pour des valeurs particulières de  $Z_2$  ou de  $Z_1$  (fig. 5.3a), (fig.5.3b), (fig.5.3c) et (fig.5.3d). Les paramètres  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  sont

des inverses de fonctions du quadripôle.

Le tableau 5.2, indique la nature physique de paramètres les plus utilisés, à savoir les paramètres  $\mathfrak{Z}$ ,  $y$ ,  $h$ ,  $g$ ,  $A$  et  $B$ .

**TABLEAU 5.2**

| Paramètres          | Définition |         |              | Nature                       |                         |                          | Conditions de mesure |         |
|---------------------|------------|---------|--------------|------------------------------|-------------------------|--------------------------|----------------------|---------|
|                     | Val<br>eur | pour    | quand        | Impé<br>dance                | Admittance              | Amplifi<br>cation        | Entrée               | Sortie  |
| $\mathfrak{Z}_{11}$ | $U_1/I_1$  | $I_2=0$ | $Z_2=\infty$ | d'entrée                     |                         |                          |                      | ouverte |
| $\mathfrak{Z}_{12}$ | $U_1/I_2$  | $I_1=0$ | $Z_1=\infty$ | de trans-<br>fert<br>inverse |                         |                          | ouverte              |         |
| $\mathfrak{Z}_{21}$ | $U_2/I_1$  | $I_2=0$ | $Z_2=\infty$ | de trans-<br>fert direct     |                         |                          |                      | ouverte |
| $\mathfrak{Z}_{22}$ | $U_2/I_2$  | $I_1=0$ | $Z_1=\infty$ | de sortie                    |                         |                          | ouverte              |         |
| $y_{11}$            | $I_1/U_1$  | $U_2=0$ | $Z_2=0$      |                              | d'entrée                |                          |                      | C. C.   |
| $y_{12}$            | $I_1/U_2$  | $U_1=0$ | $Z_1=0$      |                              | de transfert<br>inverse |                          | C. C.                |         |
| $y_{21}$            | $I_2/U_1$  | $U_2=0$ | $Z_2=0$      |                              | de transfert<br>direct  |                          |                      | C. C.   |
| $y_{22}$            | $I_2/U_2$  | $U_1=0$ | $Z_1=0$      |                              | de sortie               |                          | C. C.                |         |
| $h_{11}$            | $I_1/U_1$  | $U_2=0$ | $Z_2=0$      | d'entrée                     |                         |                          |                      | C. C.   |
| $h_{12}$            | $I_2/U_2$  | $I_1=0$ | $Z_1=\infty$ |                              |                         | inverse<br>de<br>tension | ouverte              |         |
| $h_{21}$            | $I_2/I_1$  | $U_2=0$ | $Z_2=0$      |                              |                         | directe<br>de<br>courant |                      | C. C.   |
| $h_{22}$            | $I_2/U_2$  | $I_1=0$ | $Z_1=\infty$ |                              | de sortie               |                          | ouverte              |         |
| $A$                 | $U_1/U_2$  | $I_2=0$ | $Z_2=\infty$ | $A = 1/g_{21}$               |                         |                          |                      |         |

|   |              |           |                |                 |
|---|--------------|-----------|----------------|-----------------|
| B | $U_1 / -I_2$ | $U_2 = 0$ | $Z_2 = 0$      | $B = -1/y_{21}$ |
| C | $I_1 / U_2$  | $I_2 = 0$ | $Z_2 = \infty$ | $C = 1/z_{21}$  |
| D | $I_1 / -I_2$ | $U_2 = 0$ | $Z_2 = 0$      | $D = -1/h_{21}$ |

C.C. : abréviation de « court-circuit »

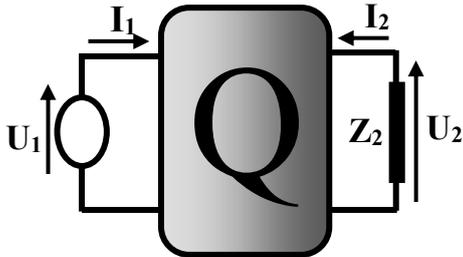


Figure.5.3a

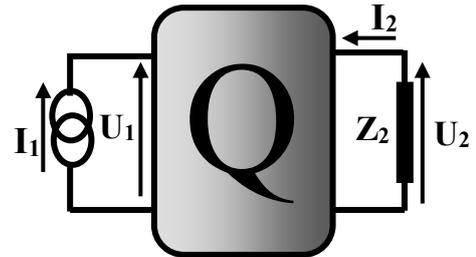


Figure.5.3b

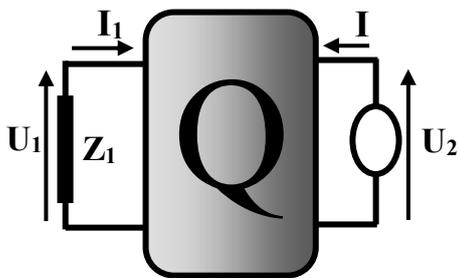


Figure. 5.3c

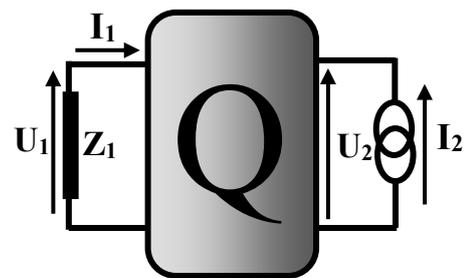


Figure.5.3d

### 5.5-3) Relations entre les paramètres d'un groupe et ceux d'un autre groupe

Soit un quadripôle défini par les deux relations suivantes aux impédances :

$$U_1 = \mathfrak{z}_{11} I_1 + \mathfrak{z}_{12} I_2, \quad U_2 = \mathfrak{z}_{21} I_1 + \mathfrak{z}_{22} I_2$$

A partir de ces deux relations, on peut chercher à exprimer  $I_1$  et  $I_2$  en fonction de  $U_1$  et  $U_2$ . Il vient :

$$I_1 = \frac{\mathfrak{z}_{22}}{\Delta_3} U_1 - \frac{\mathfrak{z}_{12}}{\Delta_3} U_2 \quad ; \quad I_2 = -\frac{\mathfrak{z}_{21}}{\Delta_3} U_1 + \frac{\mathfrak{z}_{11}}{\Delta_3} U_2$$

$\Delta_3$  est le déterminant de la matrice  $[3] = \begin{bmatrix} \mathfrak{z}_{11} & \mathfrak{z}_{12} \\ \mathfrak{z}_{21} & \mathfrak{z}_{22} \end{bmatrix}$  avec  $\Delta_3 = \mathfrak{z}_{11}\mathfrak{z}_{22} - \mathfrak{z}_{12}\mathfrak{z}_{21}$ .

En comparant avec les relations aux admittances, il vient :

$$y_{11} = \frac{\mathfrak{z}_{22}}{\Delta_3} \quad ; \quad y_{12} = -\frac{\mathfrak{z}_{12}}{\Delta_3} \quad ; \quad y_{21} = -\frac{\mathfrak{z}_{21}}{\Delta_3} \quad ; \quad y_{22} = \frac{\mathfrak{z}_{11}}{\Delta_3}$$

Il est possible de trouver ainsi les relations entre les paramètres d'un groupe quelconque et ceux d'un autre groupe. Le tableau 5.3 résume les résultats obtenus en ce qui concerne les quatre groupes les plus utilisés. Dans ce tableau,  $\Delta_y$  représente le déterminant de la matrice  $[y]$ , et  $\Delta_h$  celui de la matrice  $[h]$ .

**TABLEAU 5.3**

|          | <b>z</b>   | <b>y</b>   | <b>h</b>  | <b>A</b>   |
|----------|--|--|---|--|
| <b>z</b> | $z_{11}$ $z_{12}$<br>$z_{21}$ $z_{22}$   | $\frac{y_{22}}{\Delta_y}$ $-\frac{y_{12}}{\Delta_y}$<br>$-\frac{y_{21}}{\Delta_y}$ $\frac{y_{11}}{\Delta_y}$ | $\frac{\Delta_h}{h_{22}}$ $\frac{h_{12}}{h_{22}}$<br>$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$ $\frac{1}{h_{22}}$    | $\frac{A}{C}$ $\frac{AD - BC}{C}$<br>$\frac{1}{C}$ $\frac{D}{C}$     |
| <b>y</b> | $\frac{z_{22}}{\Delta_z}$ $-\frac{z_{12}}{\Delta_z}$<br>$-\frac{z_{21}}{\Delta_z}$ $\frac{z_{11}}{\Delta_z}$ | $y_{11}$ $y_{12}$<br>$y_{21}$ $y_{22}$   | $\frac{1}{h_{11}}$ $-\frac{h_{12}}{h_{11}}$<br>$\frac{h_{21}}{h_{11}}$ $\frac{\Delta_h}{h_{11}}$    | $\frac{D}{B}$ $\frac{-(AD - BC)}{B}$<br>$-\frac{1}{B}$ $\frac{A}{B}$ |
| <b>h</b> | $\frac{\Delta_z}{z_{22}}$ $\frac{z_{12}}{z_{22}}$<br>$-\frac{z_{21}}{z_{22}}$ $\frac{1}{z_{22}}$             | $\frac{1}{y_{11}}$ $-\frac{y_{12}}{y_{11}}$<br>$\frac{y_{21}}{y_{11}}$ $\frac{\Delta_y}{y_{11}}$             | $h_{11}$ $h_{12}$<br>$h_{21}$ $h_{22}$  | $\frac{B}{D}$ $\frac{AD - BC}{D}$<br>$-\frac{1}{D}$ $\frac{C}{D}$    |
| <b>A</b> | $\frac{z_{11}}{z_{21}}$ $\frac{\Delta_z}{z_{21}}$<br>$\frac{1}{z_{21}}$ $\frac{z_{22}}{z_{21}}$              | $-\frac{y_{22}}{y_{21}}$ $-\frac{1}{y_{21}}$<br>$-\frac{\Delta_y}{y_{21}}$ $-\frac{y_{11}}{y_{21}}$          | $-\frac{\Delta_h}{h_{21}}$ $-\frac{h_{11}}{h_{21}}$<br>$-\frac{h_{22}}{h_{21}}$ $-\frac{1}{h_{21}}$ | $A$ $B$<br>$C$ $D$   |

#### 5.5-4) Cas des quadripôles passifs

Alors qu'il faut un jeu complet de quatre paramètres pour caractériser un quadripôle actif, il suffit de trois paramètres pour caractériser un quadripôle passif.

En effet, une source de tension  $U$  placée à l'entrée d'un quadripôle passif produit dans la sortie court-circuitée un courant  $I_2 = y_{21} U$ .

La même source de tension  $U$  placée à la sortie d'un quadripôle passif produit dans l'entrée court-circuitée un courant  $I_1 = y_{12} U$ .

Or, puisque le réseau est passif, le théorème de réciprocité peut être utilisé et donne  $I_2 = I_1$ . Il en résulte que :

$$\mathfrak{Z}_{12} = \mathfrak{Z}_{21} ; y_{12} = y_{21} ; h_{12} = -h_{21} \text{ et } AD - BC = 1$$

Il en résulte donc, que tout quadripôle passif sera défini par trois paramètres, et pourra être représenté par un schéma équivalent comprenant trois (3) impédances ou trois (3) admittances.

### 5.5-5) Cas des quadripôles passifs symétriques

Un quadripôle passif est dit **symétrique** lorsqu'on peut permuter ses bornes d'entrées et ses bornes de sortie sans que les équations caractéristiques soient modifiées.

Pour un quadripôle **symétrique**, il n'existe que deux paramètres indépendants. En particulier,

$$\mathfrak{Z}_{11} = \mathfrak{Z}_{22} ; y_{11} = y_{22} ; \Delta_h = 1 ; A = D$$

### 5.6) Représentation des quadripôles passifs

Tout quadripôle passif étant défini par un groupe de trois paramètres peut être représenté par un schéma équivalent comprenant trois impédances (ou admittances).

Deux représentations sont alors utilisées :

- ▶ La représentation en **T**, appelée aussi **étoile**.
- ▶ La représentation en **Π** (pi), appelée aussi **triangle**.

#### 5.6-1) Représentation en T (étoile)

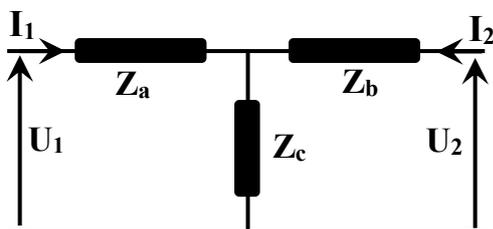


Figure.5.4

La représentation en T est particulièrement commode si le quadripôle est défini par ses paramètres en  $\mathfrak{Z}$ .

Les équations du schéma en T sont:

$$U_1 = (Z_a + Z_c) I_1 + Z_c I_2$$

$$U_2 = Z_c I_1 + (Z_b + Z_c) I_2$$

L'écriture matricielle de ce système d'équation s'établit comme suit :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_a + Z_c & Z_c \\ Z_c & Z_b + Z_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Les équations du schéma en T comparées aux relations de définition des paramètres en  $\mathfrak{Z}$  montrent que le schéma en T est équivalent au quadripôle si :

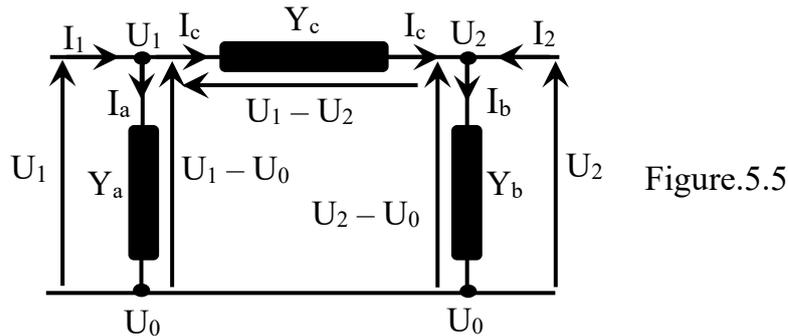
$$Z_a = Z_{11} - Z_{12} ; Z_b = Z_{22} - Z_{21} ; Z_c = Z_{12} = Z_{21} \text{ avec } Z_{12} = Z_{21}$$

Notons que :

$$\Delta_3 = (Z_a + Z_c) (Z_a + Z_c) - Z_c^2 = Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c.$$

### 5.6-2) Représentation en $\Pi$ ( triangle )

La représentation en  $\Pi$  est particulièrement utilisée quand le quadripôle est défini par ses paramètres en  $y$ .



Les équations du schéma en  $\Pi$  sont d'après la loi des nœuds :

$$\left. \begin{array}{l} I_1 = I_a + I_c \\ I_2 = I_b - I_c \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I_1 = Y_a (U_1 - U_0) + Y_c (U_1 - U_2) \\ I_2 = Y_b (U_2 - U_0) - Y_c (U_1 - U_2) \end{array}$$

$$I_1 = (Y_a + Y_c) U_1 - Y_c U_2$$

$$I_2 = -Y_c U_1 + (Y_b + Y_c) U_2 \quad (\text{Sachant que } U_0 = 0)$$

Comparées aux relations de définition des paramètres en  $y$ , elles montrent que le schéma en  $\Pi$  est équivalent au quadripôle si :

$$Y_a = y_{11} + y_{12} ; Y_b = y_{22} + y_{21} ; Y_c = -y_{12} = -y_{21}$$

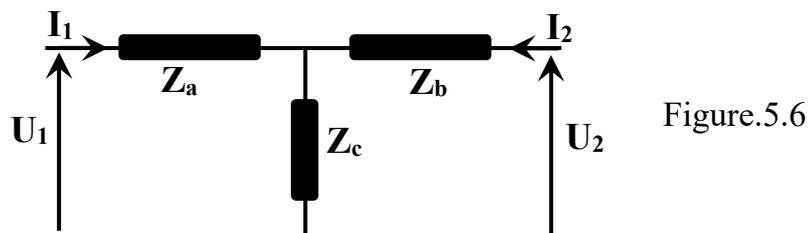
### 5.6-3) Passage d'une représentation en T à une représentation en $\Pi$

C'est l'équivalent de la transformation étoile-triangle. Soit un quadripôle dont on connaît le Schéma équivalent en T, ( fig .5.6 ). ses paramètres sont connus :

$$Z_a = \frac{1}{Y_a}$$

$$Z_b = \frac{1}{Y_b}$$

$$Z_c = \frac{1}{Y_c}$$



On se propose de déterminer son schéma équivalent en  $\Pi$  (fig.5.7).

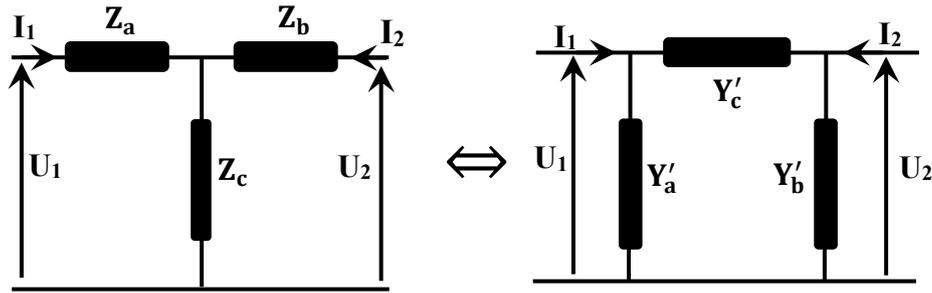


Figure.5.7

Les inconnus sont donc  $Y'_a$ ,  $Y'_b$  et  $Y'_c$ .

Le passage d'une représentation en T à une représentation en  $\Pi$  nous impose un rappel sur l'inverse d'une matrice (voir appendice).

Le passage du quadripôle en T vers le quadripôle en  $\Pi$  s'établit comme suit :

D'abord donnons la matrice admittance  $[Y]$  du quadripôle en T. Pour cela calculons la matrice inverse de ce quadripôle. On a la matrice impédance du quadripôle en T :

$$(Z)_T = \begin{pmatrix} Z_a + Z_c & Z_c \\ Z_c & Z_b + Z_c \end{pmatrix}$$

Alors l'inverse de la matrice  $[Z]_T$  est :

$$(Z)_T^{-1} = (Y)_T = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{pmatrix} Z_b + Z_c & -Z_c \\ -Z_c & Z_a + Z_c \end{pmatrix},$$

où  $\Delta_Z = Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c$ ,

et la matrice du montage en  $\Pi$  est :

$$(Y')_\Pi = \begin{pmatrix} Y'_a + Y'_c & -Y'_c \\ -Y'_c & Y'_b + Y'_c \end{pmatrix}$$

L'équivalence entre les deux schémas sera établie si et seulement si

$$[Y]_T = [Y']_\Pi \Rightarrow \begin{cases} Y'_a + Y'_c = \frac{Z_b + Z_c}{\Delta_Z} \\ Y'_c = \frac{Z_c}{\Delta_Z} \\ Y'_b + Y'_c = \frac{Z_a + Z_c}{\Delta_Z} \end{cases}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} Y'_a &= \frac{Z_b}{\Delta_Z} = \frac{Z_b}{Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c} = \frac{Y_a Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c} \\ Y'_b &= \frac{Z_a}{\Delta_Z} = \frac{Z_a}{Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c} = \frac{Y_b Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c} \\ Y'_c &= \frac{Z_c}{\Delta_Z} = \frac{Z_c}{Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c} = \frac{Y_a Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c} \end{aligned}$$

#### 5.6-4) Passage d'une représentation $\Pi$ à une représentation T

C'est l'équivalent de la transformation inverse triangle- étoile. Soit un quadripôle dont on connaît le schéma équivalent en  $\Pi$ , ( fig .5.8 ).C.à.d. ses paramètres sont

connus :  $Y'_a = \frac{1}{Z'_a}$  ;  $Y'_b = \frac{1}{Z'_b}$  ;  $Y'_c = \frac{1}{Z'_c}$

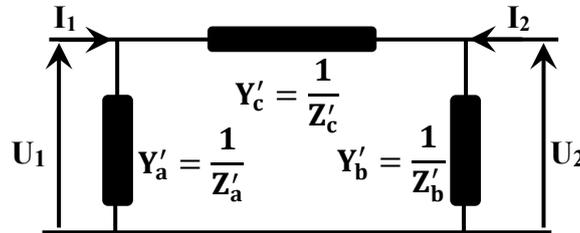


Figure.5.8

On se propose de déterminer son schéma équivalent en T, (fig.5.9 ).

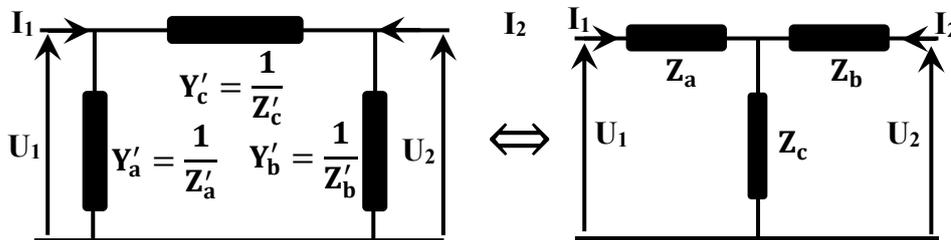


Figure.5.9

Les inconnues sont cette fois-ci :  $Z_a, Z_b, Z_c$ .

La matrice admittance de la représentation en  $\Pi$  est donnée par :

$$(Y')_{\Pi} = \begin{pmatrix} Y'_a + Y'_c & -Y'_c \\ -Y'_c & Y'_b + Y'_c \end{pmatrix} \Rightarrow (Y)_{\Pi}^{-1} = (Z')_{\Pi} = \begin{pmatrix} \frac{Y'_b + Y'_c}{\Delta'_Y} & \frac{Y'_c}{\Delta'_Y} \\ \frac{Y'_c}{\Delta'_Y} & \frac{Y'_a + Y'_c}{\Delta'_Y} \end{pmatrix}$$

Où  $\Delta'_Y = Y'_a Y'_b + Y'_a Y'_c + Y'_b Y'_c$

On rappelle que la matrice du schéma en T est :

$$(Z)_{\text{T}} = \begin{pmatrix} Z_a + Z_c & Z_c \\ Z_c & Z_b + Z_c \end{pmatrix}$$

Le principe du calcul est le même que le précédent. L'équivalence entre  $\Pi$  et T s'établit lorsque  $(Z')_{\Pi} = (Z)_{\text{T}}$ . Il vient alors :

$$[Z']_{\Pi} = [Z]_{\text{T}} \Rightarrow \begin{cases} Z_a + Z_c = \frac{Y'_b + Y'_c}{\Delta'_Y} \\ Z_c = \frac{Y'_c}{\Delta'_Y} \\ Z_b + Z_c = \frac{Y'_a + Y'_c}{\Delta'_Y} \end{cases}$$

On aura finalement :

$$\begin{aligned}
 Z_a &= \frac{Y'_b}{\Delta'_Y} = \frac{Y'_b}{Y'_a Y'_b + Y'_a Y'_c + Y'_b Y'_c} = \frac{Z'_a Z'_c}{Z'_a + Z'_b + Z'_c} \\
 Z_b &= \frac{Y'_a}{\Delta'_Y} = \frac{Y'_a}{Y'_a Y'_b + Y'_a Y'_c + Y'_b Y'_c} = \frac{Z'_b Z'_c}{Z'_a + Z'_b + Z'_c} \\
 Z_c &= \frac{Y'_c}{\Delta'_Y} = \frac{Y'_c}{Y'_a Y'_b + Y'_a Y'_c + Y'_b Y'_c} = \frac{Z'_a Z'_b}{Z'_a + Z'_b + Z'_c}
 \end{aligned}$$

### 5.7) Représentation des quadripôles actifs

Lorsqu'un quadripôle actif est défini par un groupes de quatre paramètres, on peut essayer de trouver un schéma équivalent à ce quadripôle. C'est-à-dire un schéma comprenant des impédances (ou des admittances), et des sources liées dont le fonctionnement soit régi par les mêmes équations que le quadripôle. La connaissance de ce schéma équivalent est particulièrement utile lorsque le réseau réel n'est pas connu et que la détermination des paramètres résulte de mesures. Il importe de noter que les éléments du schéma équivalent ne sont pas forcément physiquement réalisables.

#### 5.7-1) Représentation à deux sources liées

Les schémas équivalents à deux sources liées résultent directement des équations définissant les paramètres impédances (fig.5.10a), les paramètres admittances (fig.5.10b), et les paramètres hybrides (fig.5.10c).

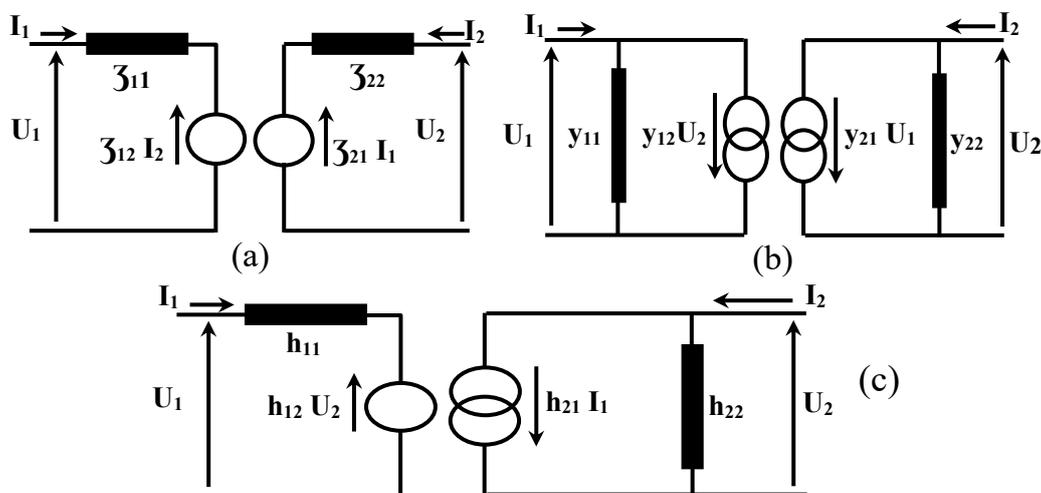


Figure.5.10

### 5.7-2) Représentation à une source liée

Il est parfois plus commode de transformer le schéma à deux sources, (prenons le cas de la figure.5.10b), en un schéma à une seule source, mais comprenant alors trois admittances (ou trois impédances) au lieu de deux (fig.5.11).

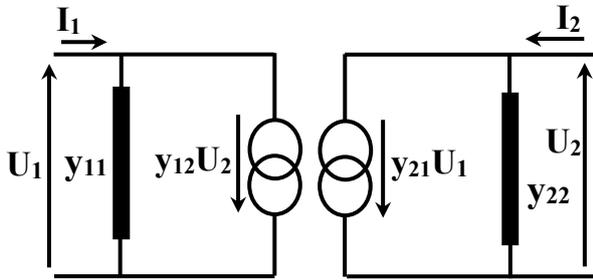


Figure.5.10b

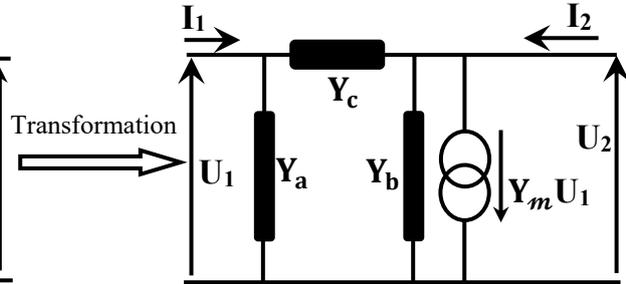
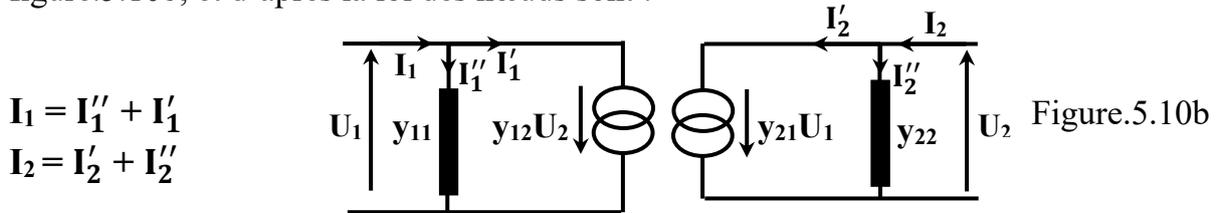


Figure.5.11

Écrivons les équations paramétriques des deux schémas représentés par les figures, 5.10b et 5.11. Pour cela reprenons la figure.5.10b. Les équations du schéma de la figure.5.10b, et d'après la loi des nœuds sont :



$$\begin{aligned} I_1 &= I_1'' + I_1' \\ I_2 &= I_2'' + I_2' \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{cases} I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2 \\ I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2 \end{cases}$$

Les équations du schéma de la figure.5.11 d'après la loi des nœuds sont :

$$\begin{cases} I_1 = I_1' + I_1'' \\ I_2 = I_2' + I_2'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = (Y_a + Y_c)U_1 - Y_cU_2 \\ I_2 = I_2' + Y_mU_1 \end{cases}$$

Mais :  $I_2' = I_3 - I_1' = -Y_cU_1 + (Y_b + Y_c)U_2$

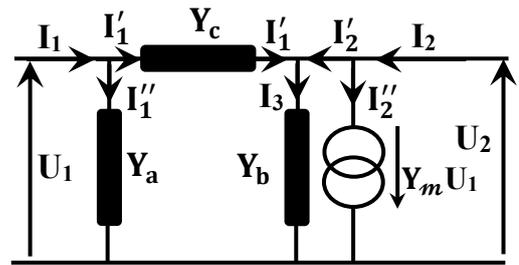


Figure.5.11

Il en résulte donc les équations qui régissent

le schéma de la figure.5.11 sous leur forme finale :

$$\begin{cases} I_1 = (Y_a + Y_c)U_1 - Y_cU_2 \\ I_2 = (Y_m - Y_c)U_1 + (Y_b + Y_c)U_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2 \\ I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2 \end{cases} \text{ et équivalent à } \begin{cases} I_1 = (Y_a + Y_c)U_1 - Y_cU_2 \\ I_2 = (Y_m - Y_c)U_1 + (Y_b + Y_c)U_2 \end{cases} \text{ si :}$$

$$\left. \begin{aligned} y_{11} &= (Y_a + Y_c) \\ y_{12} &= -Y_c \\ y_{21} &= (Y_m - Y_c) \\ y_{22} &= (Y_b + Y_c) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} Y_a = y_{11} + y_{12} \\ Y_b = y_{22} + y_{12} \\ Y_c = -y_{12} \\ Y_m = y_{21} - y_{12} \end{cases}$$

## 5.8) Association des quadripôles

### 5.8-1) Association en série

Relations caractéristiques de l'association :

$$I_1 = I'_1 = I''_1$$

$$I_2 = I'_2 = I''_2$$

$$\text{et } \begin{cases} U_1 = U'_1 + U''_1 \\ U_2 = U'_2 + U''_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U'_1 \\ U'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U''_1 \\ U''_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Équations du quadripôle } Q' : \begin{pmatrix} U'_1 \\ U'_2 \end{pmatrix} = (Z') \begin{pmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Équations du quadripôle } Q'' : \begin{pmatrix} U''_1 \\ U''_2 \end{pmatrix} = (Z'') \begin{pmatrix} I''_1 \\ I''_2 \end{pmatrix}$$

Donc l'équation de l'ensemble est :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = (Z') \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + (Z'') \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ou bien encore : } \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = (Z') \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + (Z'') \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \{(Z') + (Z'')\} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Il vient : } \boxed{(Z) = (Z') + (Z'')}$$

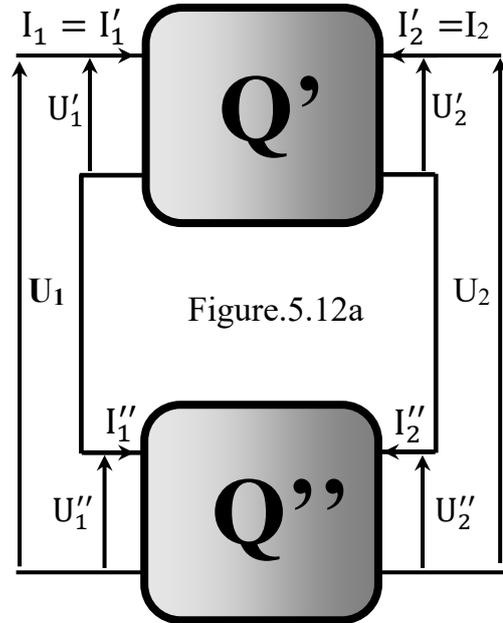


Figure.5.12a

La matrice d'impédances équivalente à l'association de deux quadripôles en série est égale à la somme des deux matrices d'impédances des quadripôles élémentaires.

### Condition de validité :

Pour obtenir le résultat précédent, nous avons supposé implicitement que les courants sortant par les bornes inférieures de  $Q'$  (côté entrée et côté sortie) étaient les mêmes que les courants entrant par les bornes supérieures de  $Q''$ , soit  $I'_1$  et  $I'_2$ . Or ceci n'est vrai que si certaines conditions de GUILLEMIN, sont satisfaites. Nous n'entrerons pas dans le détail mais il faut noter que ces conditions sont toujours satisfaites dans un cas extrêmement fréquent: celui d'un chemin d'impédance nulle (bornes inférieures de  $Q'$  et bornes supérieures de  $Q''$  court-circuitées) (fig.5.12a').

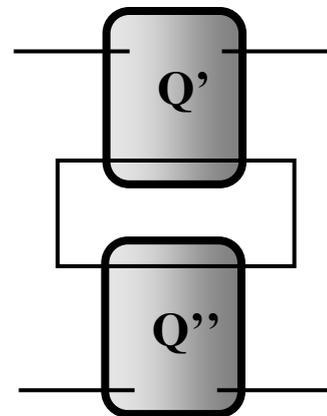
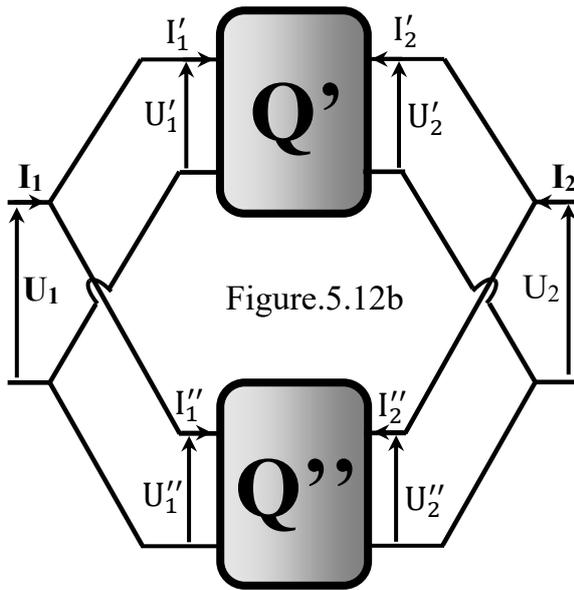


Figure.5.12a'

### 5.8-2) Association en parallèle



Relations caractéristiques de l'association :

$$\begin{cases} U_1 = U'_1 = U''_1 \\ U_2 = U'_2 = U''_2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} I_1 = I'_1 + I''_1 \\ I_2 = I'_2 + I''_2 \end{cases}$$

$$\text{Soit : } \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I''_1 \\ I''_2 \end{pmatrix}$$

Équations du quadripôle Q' :

$$\begin{pmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{pmatrix} = (Y') \begin{pmatrix} U'_1 \\ U'_2 \end{pmatrix}$$

Équations du quadripôle Q'' :

$$\begin{pmatrix} I''_1 \\ I''_2 \end{pmatrix} = (Y'') \begin{pmatrix} U''_1 \\ U''_2 \end{pmatrix}$$

Donc l'équation de l'ensemble est :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = (Y') \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} + (Y'') \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \{(Y') + (Y'')\} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Il vient :

$$\boxed{(Y) = (Y') + (Y'')}$$

La matrice d'admittances équivalente à l'association de deux quadripôles en parallèle est égale à la somme des deux matrices d'admittances des quadripôles élémentaires.

### 5.8-3) Association en série-parallèle

Relations caractéristiques de l'association :

$$\begin{cases} I_1 = I'_1 = I''_1 \\ I_2 = I'_2 = I''_2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} U_1 = U'_1 + U''_1 \\ U_2 = U'_2 + U''_2 \end{cases}$$

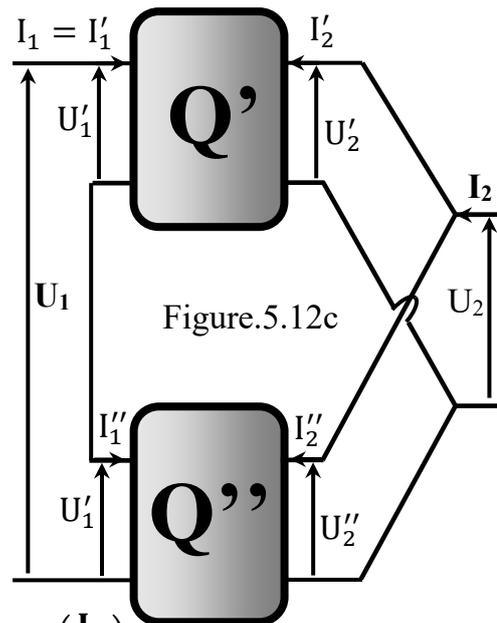
$$\text{Soit : } \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U'_1 \\ U'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U''_1 \\ U''_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Équations du quadripôle Q' : } \begin{pmatrix} U'_1 \\ U'_2 \end{pmatrix} = (h') \begin{pmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Équations du quadripôle Q'' : } \begin{pmatrix} U''_1 \\ U''_2 \end{pmatrix} = (h'') \begin{pmatrix} I''_1 \\ I''_2 \end{pmatrix}$$

Donc l'équation de l'ensemble est :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = (h') \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + (h'') \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = (h') \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + (h'') \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$



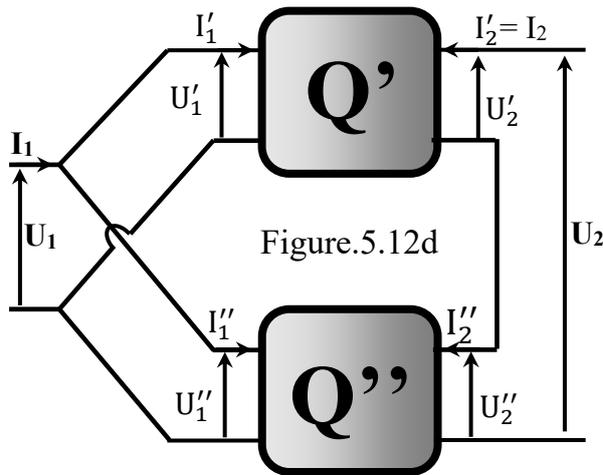
$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} = \{(\mathbf{h}') + (\mathbf{h}'')\} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix}. \text{ Il vient :}$$

$$\boxed{(\mathbf{h}) = (\mathbf{h}') + (\mathbf{h}'')}$$

La matrice hybride directe équivalente à l'association en série- parallèle de deux quadripôles est égale à la somme des deux matrices hybrides directe des deux quadripôles élémentaires.

#### 5.8-4) Association en parallèle- série

Relations caractéristiques de l'association :



$$\begin{cases} \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_2' = \mathbf{I}_2'' \\ \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_1' = \mathbf{U}_1'' \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_1' + \mathbf{I}_1'' \\ \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_2' + \mathbf{U}_2'' \end{cases}$$

$$\text{soit : } \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1' \\ \mathbf{U}_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1'' \\ \mathbf{U}_2'' \end{pmatrix}$$

Équations du quadripôle Q'

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_1' \\ \mathbf{U}_2' \end{pmatrix} = (\mathbf{g}') \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1' \\ \mathbf{I}_2' \end{pmatrix}$$

Équations du quadripôle Q''

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_1'' \\ \mathbf{U}_2'' \end{pmatrix} = (\mathbf{g}'') \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1'' \\ \mathbf{I}_2'' \end{pmatrix}$$

Donc l'équation de l'ensemble est :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{g}') \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1' \\ \mathbf{I}_2' \end{pmatrix} + (\mathbf{g}'') \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1'' \\ \mathbf{I}_2'' \end{pmatrix} = (\mathbf{g}') \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{g}'') \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} = \{(\mathbf{g}') + (\mathbf{g}'')\} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

Il vient :

$$\boxed{(\mathbf{g}) = (\mathbf{g}') + (\mathbf{g}'')}$$

La matrice hybride inverse équivalente à l'association en parallèle- série de deux quadripôles est égale à la somme des deux matrices hybrides inverses des deux quadripôles élémentaires.

#### 5.8-5) Association en cascade

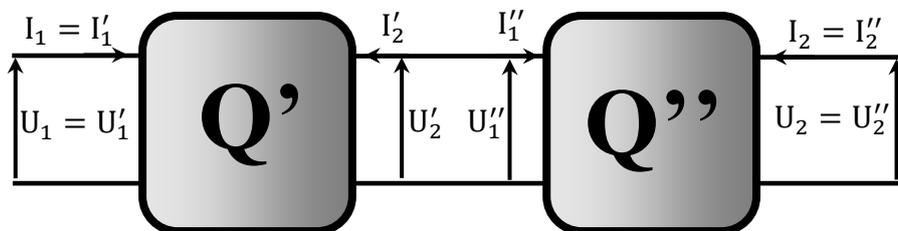


Figure.5.12e

Relations caractéristiques de l'association

$$\begin{cases} \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_1' \\ \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_1' \end{cases} ; \begin{cases} \mathbf{U}_2' = \mathbf{U}_1'' \\ \mathbf{I}_2' = -\mathbf{I}_1'' \end{cases} ; \begin{cases} \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_2'' \\ \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_2'' \end{cases}$$

Équations du quadripôle Q' ; Équations du quadripôle Q''

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}'_1 \\ \mathbf{I}'_1 \end{pmatrix} = (\mathbf{t}') \begin{pmatrix} \mathbf{U}'_2 \\ -\mathbf{I}'_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \mathbf{U}''_1 \\ \mathbf{I}''_1 \end{pmatrix} = (\mathbf{t}'') \begin{pmatrix} \mathbf{U}''_2 \\ -\mathbf{I}''_2 \end{pmatrix}$$

Équations de l'ensemble :  $\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{pmatrix} = (\mathbf{t}) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$ . Mais :  $\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}'_1 \\ \mathbf{I}'_1 \end{pmatrix} = (\mathbf{t}') \begin{pmatrix} \mathbf{U}'_2 \\ -\mathbf{I}'_2 \end{pmatrix}$

Sachant que :  $\begin{pmatrix} \mathbf{U}'_2 \\ -\mathbf{I}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}''_1 \\ \mathbf{I}''_1 \end{pmatrix} = (\mathbf{t}'') \begin{pmatrix} \mathbf{U}''_2 \\ -\mathbf{I}''_2 \end{pmatrix}$

Alors en remplaçant  $\begin{pmatrix} \mathbf{U}'_2 \\ -\mathbf{I}'_2 \end{pmatrix}$  par  $(\mathbf{t}'') \begin{pmatrix} \mathbf{U}''_2 \\ -\mathbf{I}''_2 \end{pmatrix}$  dans  $\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{pmatrix}$ , on obtient :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{pmatrix} = (\mathbf{t}')(\mathbf{t}'') \begin{pmatrix} \mathbf{U}''_2 \\ -\mathbf{I}''_2 \end{pmatrix}$$

En tenant compte de :  $\begin{pmatrix} \mathbf{U}''_2 \\ -\mathbf{I}''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$  vu que  $\begin{cases} \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}''_2 \\ \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}''_2 \end{cases}$ ,

il en résulte donc :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{pmatrix} = (\mathbf{t}')(\mathbf{t}'') \begin{pmatrix} \mathbf{U}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{t}) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\boxed{(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}') \times (\mathbf{t}'')}$$

La matrice transfert ( chaîne) directe équivalente à l'association de deux quadripôles en cascade est égale au produit des deux matrices transfert directes des deux quadripôles élémentaires.

### 5.9) Fonctions du quadripôle linéaire

Par analogie avec les fonctions de réseau, on définit les fonctions de transfert du quadripôle, chacune d'elles étant le rapport entre une réponse et une excitation. On peut alors distinguer :

- Les fonctions de transfert **direct** correspondant à une transmission d'énergie de l'entrée vers la sortie (excitation entre les deux bornes d'entrée et réponse entre les deux bornes de sortie).
- Les fonctions de transfert **inverse** correspondant à une transmission d'énergie de la sortie vers l'entrée (excitation entre les deux bornes de sortie et réponse entre les deux bornes d'entrée).

#### 5.9-1) Fonctions de transfert direct du quadripôle

Le quadripôle est à volonté considéré comme excité par une source de tension  $U_1$

créant à l'entrée un courant  $I_1$  (fig.5.13a) ou par une source de courant  $I_1$  créant à l'entrée une tension  $U_1$  (fig. 5.13b).

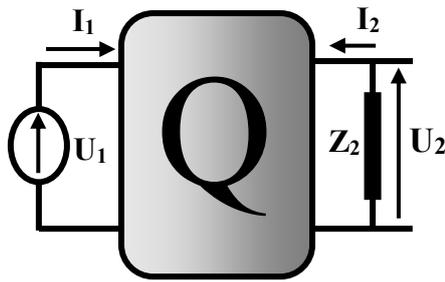


Figure.5.13a

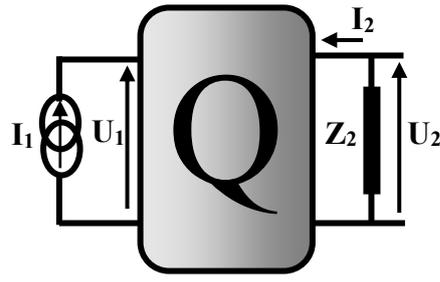


Figure.5.13b

Les fonctions de transfert direct sont alors les suivantes :

- Impédance d'entrée du quadripôle :  $Z_e = \frac{U_1}{I_1}$  .
- Admittance d'entrée du quadripôle :  $Y_e = \frac{I_1}{U_1}$  .

Diverses fonctions de transfert directes, dont la définition et la nature sont indiquées dans le tableau 5.4 :

**TABLEAU 5.4**

| Source                                     | Tension $U_1$   |  | Courant $I_1$   |   |
|--|---|--|---|---|
|  | Tension $U_2$   | Courant $I_2$  | Courant $I_2$   | Tension $U_2$   |
| Fonction de transfert direct du quadripôle | $A_{d_u} = \frac{U_2}{U_1}$<br>Amplification directe en tension | $Y_{t_d} = \frac{I_2}{U_1}$<br>Admittance de transfert directe | $A_{d_i} = \frac{I_2}{I_1}$<br>Amplification directe en courant | $Z_{t_d} = \frac{U_2}{I_1}$<br>Impédance de transfert directe |

### 5.9-2) Fonctions de transfert inverse du quadripôle

Le quadripôle est à volonté considéré comme excité par une source de tension  $U_2$  créant en sortie un courant  $I_2$  (fig. 5.13c) ou par une source de courant  $I_2$  créant en sortie une tension  $U_2$  (fig. 5.13d).

Attention ! l'entrée doit être fermée sur l'impédance interne  $Z_1$  du générateur, qui constitue dans ce cas la charge du quadripôle.

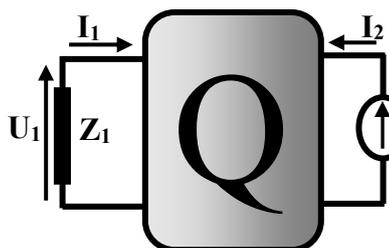


Figure.5.13c

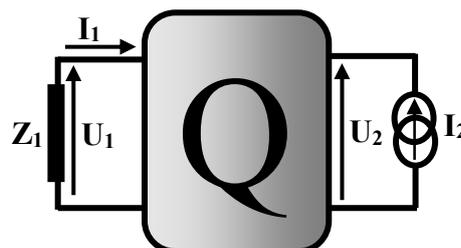


Figure.5.13d

Les fonctions de transfert inverses sont alors les suivantes :

- Impédance de sortie du quadripôle :  $Z_s = \frac{U_2}{I_2}$ .
- Admittance de sortie du quadripôle :  $Y_s = \frac{I_1}{U_2}$ .

Diverses fonctions de transfert inverses, dont la définition et la nature sont indiquées dans le tableau 5.5 :

**TABLEAU 5.5**

| Source                                      | Tension $U_2$   |  | Courant $I_2$   |   |
|---|---|--|---|---|
|   | Tension $U_1$   | Courant $I_1$  | Courant $I_1$   | Tension $U_1$   |
| Réponse cherchée                            |   |  |   |   |
| Fonction de transfert inverse du quadripôle | $A_{i_u} = \frac{U_1}{U_2}$<br>Amplification inverse en tension | $Y_{t_i} = \frac{I_1}{U_2}$<br>Admittance de transfert inverse | $A_{i_i} = \frac{I_1}{I_2}$<br>Amplification inverse en courant | $Z_{t_i} = \frac{U_1}{I_2}$<br>Impédance de transfert inverse |

### 5.9-3) Calcul des Fonctions du quadripôle

Dès qu'un groupe de quatre paramètres du quadripôle a été déterminé et que la valeur de la charge est donnée, le calcul des fonctions du quadripôle est immédiat. Supposons par exemple que la source excitant le quadripôle soit la tension  $U_1$ . Les trois autres grandeurs caractéristiques sont les solutions de trois équations linéaires, à savoir :

- Les deux relations linéaires caractéristiques du quadripôle ;
- La relation  $U_2 = -Z_2 I_2$ .

Toutes les grandeurs caractéristiques étant connues, les fonctions du quadripôle le sont également.

### 5.10) Intérêt pour la détermination des fonctions de réseau

#### 5.10-1) Définition et nature des fonctions de réseau

Ces fonctions sont relatives à la source réelle, qui peut à volonté être considérée comme une source de tension  $E_1$  (tension à vide du générateur) (fig.5.14a) ou comme

une source de courant  $J_1 = \frac{E_1}{Z_1}$  (courant de court-circuit du générateur) (fig.5.14b)

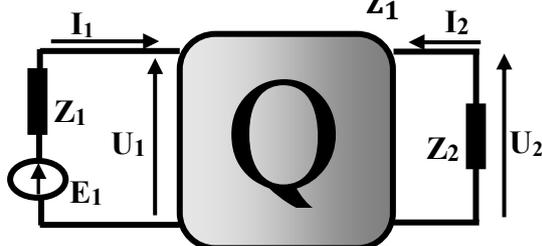


Figure.5.14a

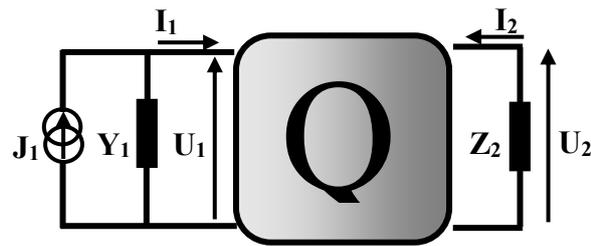


Figure.5.14b

On définit ainsi :

- Une impédance d'entrée vue de la source de tension :  $Z'_e = \frac{E_1}{I_1}$
- Une admittance d'entrée vue de la source de courant :  $Y'_e = \frac{J_1}{U_1}$

Différentes fonctions de transfert de réseau, dont la définition et la nature sont indiquées dans le tableau 5.6 :

**TABLEAU 5.6**

| Source                          | Source de tension $E_1$   |  | Source de courant $J_1$   |   |
|---------------------------------|---|--|---|---|
| Réponse cherchée                | Tension $U_2$   | Courant $I_2$  | Courant $I_2$   | Tension $U_2$   |
| Fonction de transfert du réseau | $A_{U_r} = \frac{U_2}{E_1}$<br>Amplification en tension du réseau | $Y_{t_r} = \frac{I_2}{E_1}$<br>Admittance de transfert du réseau | $A_{I_r} = \frac{I_2}{J_1}$<br>Amplification en courant du réseau | $Z_{t_r} = \frac{U_2}{J_1}$<br>Impédance de transfert du réseau |

### 5.10-2) Calcul des fonctions de réseau

Si les fonctions directes du quadripôle sont connues, le passage aux fonctions de réseau est immédiat puisque nous disposons en plus de la relation

$$E_1 = U_1 + Z_1 I_1 \dots \dots \dots (1)$$

Ou, ce qui revient au même, de la relation :

$$J_1 = I_1 + Y_1 U_1 \dots \dots \dots (2)$$

Le calcul de  $Z'_e$ , en fonction de  $Z_e$  et  $Z_1$  ainsi que le calcul de  $Y'_e$  en fonction de  $Y_e$  et  $Y_1$  s'effectue comme suit :

en divisant la relation (1) par  $I_1$  :

$$\frac{E_1}{I_1} = \frac{U_1}{I_1} + Z_1 \Rightarrow Z'_e = Z_e + Z_1$$

et en divisant la relation (2) par  $U_1$  :

$$\frac{J_1}{U_1} = \frac{I_1}{U_1} + Y_1 \Rightarrow Y'_e = Y_e + Y_1$$

Les autres fonctions de réseau s'obtiennent implicitement en fonction des impédances et admittances d'entrées de la façon suivante :

$$A_{U_r} = \frac{U_2}{E_1} = \frac{U_2/U_1}{E_1/U_1} = A_{dU} \left( \frac{1}{E_1/U_1} \right)$$

$$\frac{E_1}{U_1} = \frac{U_1}{U_1} + Z_1 \frac{I_1}{U_1} = 1 + \frac{Z_1}{U_1/I_1} = 1 + \frac{Z_1}{Z_e} = \frac{Z_e + Z_1}{Z_e}$$

$$A_{U_r} = A_{dU} \left( \frac{1}{\frac{Z_e + Z_1}{Z_e}} \right) \Rightarrow A_{U_r} = A_{dU} \left( \frac{Z_e}{Z_e + Z_1} \right)$$

$$Y_{t_r} = \frac{I_2}{E_1} = \frac{I_2/U_1}{E_1/U_1} \Rightarrow Y_{t_r} = \frac{Y_{td}}{\frac{Z_e + Z_1}{Z_e}} = Y_{td} \left( \frac{Z_e}{Z_e + Z_1} \right)$$

ou encore  $Y_{t_r} = Y_{td} \left( \frac{Y_1}{Y_e + Y_1} \right)$

$$A_{I_r} = \frac{I_2}{J_1} = \frac{I_2/I_1}{J_1/I_1} = A_{dI} \left( \frac{1}{\frac{I_1 + Y_1 U_1}{I_1}} \right) = A_{dI} \left( \frac{1}{1 + Y_1 \frac{U_1}{I_1}} \right) = A_{dI} \left( \frac{1}{1 + \frac{Y_1}{Y_e}} \right)$$

$$A_{I_r} = A_{dI} \left( \frac{1}{1 + \frac{Y_1}{Y_e}} \right) = A_{dI} \left( \frac{Y_e}{Y_e + Y_1} \right)$$

Sachant que  $\frac{U_1}{I_1} = Z_e$  et bien entendu  $Z_e = \frac{1}{Y_e}$ ,  $A_{I_r}$  peut s'écrire encore :

$$A_{I_r} = A_{dI} \left( \frac{Y_e}{Y_e + Y_1} \right) = A_{dI} \left( \frac{Z_1}{Z_1 + Z_e} \right)$$

L'impédance de transfert de réseau se calcule également :

$$Z_{t_r} = \frac{U_2}{J_1} = \frac{U_2/I_1}{J_1/I_1} = Z_{td} \left( \frac{1}{\frac{I_1 + Y_1 U_1}{I_1}} \right) = Z_{td} \left( \frac{1}{1 + Y_1 \frac{U_1}{I_1}} \right) = Z_{td} \left( \frac{1}{1 + \frac{Y_1}{Y_e}} \right)$$

Il vient alors :

$$Z_{t_r} = Z_{td} \left( \frac{Y_e}{Y_e + Y_1} \right) \quad \text{ou bien encore} \quad Z_{t_r} = Z_{td} \left( \frac{Z_1}{Z_1 + Z_e} \right)$$

### Tableau récapitulatif des fonctions de réseau

|  |  |
|--|--|
| $Z'_e = Z_e + Z_1$                                       | $Y'_e = Y_e + Y_1$   |
| $A_{U_r} = A_{d_U} \left( \frac{Z_e}{Z_e + Z_1} \right)$ | $Y_{t_r} = Y_{t_d} \left( \frac{Z_e}{Z_e + Z_1} \right)$<br>$Y_{t_r} = Y_{t_d} \left( \frac{Y_1}{Y_e + Y_1} \right)$ |
| $A_{I_r} = A_{d_I} \left( \frac{Y_e}{Y_e + Y_1} \right)$ | ou encore $A_{I_r} = A_{d_I} \left( \frac{Z_1}{Z_1 + Z_e} \right)$   |
| $Z_{t_r} = Z_{t_d} \left( \frac{Y_e}{Y_e + Y_1} \right)$ | ou encore $Z_{t_r} = Z_{t_d} \left( \frac{Z_1}{Z_1 + Z_e} \right)$   |

**5.10-3) Cas particulier intéressant, attaque du quadripôle en tension ou en courant**

Selon les valeurs respectives de l'impédance interne  $Z_1$  du générateur et de l'impédance d'entrée  $Z_e$  du quadripôle, deux cas limites peuvent se produire :

**1<sup>er</sup> cas** :  $Z_1 \ll Z_e$

Dans ce cas  $U_1 \approx E_1$  ; on dit que le quadripôle est attaqué en tension. On voit immédiatement que :

$$Z'_e \approx Z_e, A_{V_r} \approx A_{d_V} \text{ et } Y_{t_r} \approx Y_{t_d}.$$

Dans le cas d'une attaque en tension, ces trois fonctions de réseau se confondent avec les fonctions de transfert du quadripôle, ce qui en simplifie évidemment le calcul.

**2<sup>ème</sup> cas** :  $Y_1 \ll Y_e$  ce qui revient au même,  $Z_1 \gg Z_e$ .

Dans ce cas  $I_1 \approx J_1$  ; on dit que le quadripôle est attaqué en courant. On voit immédiatement que :

$$Y'_e \approx Y_e, A_{I_r} \approx A_{d_I} \text{ et } Z_{t_r} \approx Z_{t_d}.$$

Ces trois fonctions de réseau se confondent avec les fonctions de transfert correspondantes du quadripôle.

**CHAPITRE 5**

# LES FILTRES

## 6.1) Classification des filtres

Un filtre est constitué par un ensemble de quadripôles conçus de façon à transmettre d'une manière sélective une bande de fréquences. Un filtre idéal comporte donc une ou plusieurs bandes passantes, à l'intérieur desquelles les signaux sont transmis sans affaiblissement, et une ou plusieurs bandes atténuées, à l'intérieur desquelles les signaux sont étouffés.

Sous sa forme idéale, un filtre est un quadripôle sans pertes et par suite sans résistances, c'est un organe à qui on demande d'assurer la sélection désirée de la bande passante.

En effet, la présence de résistances provoquerait une diminution uniforme de l'intensité pour les différentes fréquences, ce qui est contraire au but poursuivi.

Le filtre idéal devrait permettre le passage sans affaiblissement (gain unité) des tensions comprises dans une certaine bande de fréquence que l'on appelle **bande passante**. En dehors de la bande passante, le gain devrait être nul. On distingue alors quatre sortes de filtres :

\*le filtre « **passé-bas** » :

Bande passante  $0 < f < f_c$  ; bande atténuée  $f_c < f < \infty$  (fig.6.1.a).

\*le filtre « **passé-haut** » :

Bande passante  $f_c < f < \infty$  ; bande atténuée  $0 < f < f_c$  (fig.6.1.b).

\*Le filtre « **passé-bande** » :

Bande passante  $f_{c1} < f < f_{c2}$  ; bandes atténuées  $0 < f < f_{c1}$  et  $f_{c2} < f < \infty$  (fig.6.1.c).

\*Le filtre « **coupe-bande** » :

Bande passante  $0 < f < f_{c1}$  et  $f_{c2} < f < \infty$  ; bandes atténuées  $f_{c1} < f < f_{c2}$  (fig.6.1.d).

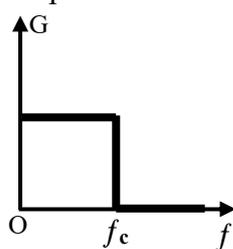


Figure.6.1.a

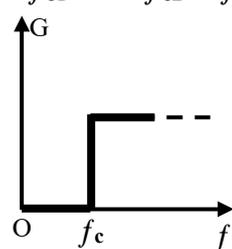


Figure.6.1.b

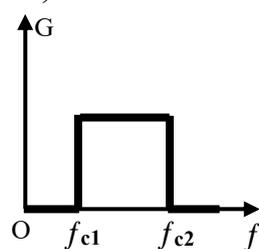


Figure.6.1.c

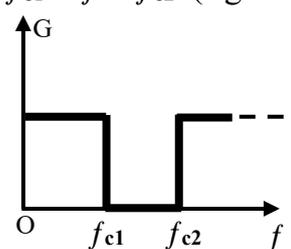


Figure.6.1.d

## 6.2) Impédance caractéristique

Le quadripôle (en T ou en  $\pi$ ) ne peut réaliser qu'un filtre de bande très imparfaite. Aussi a-t-on pensé à brancher en cascade plusieurs de ces quadripôles identiques. Proposons-nous alors de rechercher si l'impédance d'entrée  $Z_e$  d'un de ces quadripôles peut être égale à l'impédance  $Z_c$  du récepteur. En effet, s'il en est ainsi, l'affaiblissement du courant obtenu avec n quadripôles, sera n fois plus élevé que

l'affaiblissement obtenu avec un seul. On pourra donc obtenir l'affaiblissement que l'on voudra en utilisant un nombre convenable de quadripôles.

Déterminons la valeur de  $Z_c$ . Pour cela nous supposons, pour simplifier, que les quadripôles sont symétriques, alors on peut écrire  $Z_e = Z_c = Z_K$ , et nous adoptons pour les courants et les tensions les sens indiqués sur la figure.6.2 : système récepteur pour l'entrée d'un quadripôle, système générateur pour la sortie.

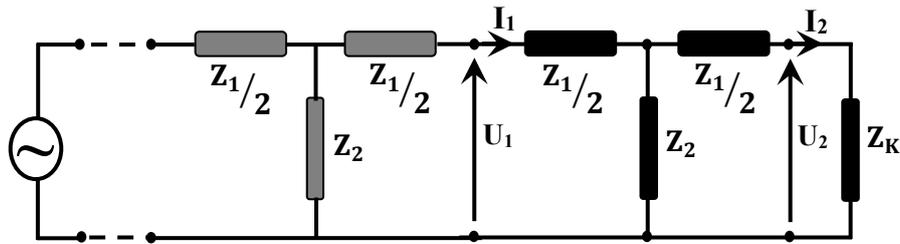


Figure.6.2

La décomposition en deux mailles indépendantes nous permet d'écrire les relations suivantes :

$$U_1 = \left(\frac{Z_1}{2} + Z_2\right) I_1 - Z_2 I_2$$

$$-U_2 = -Z_2 I_1 + \left(\frac{Z_1}{2} + Z_2\right) I_2$$

Posons :

$$\Delta = \frac{Z_1}{2} + Z_2 \quad \text{et} \quad \Omega = Z_2 \quad \text{on aura} \quad \begin{cases} U_1 = \Delta I_1 - \Omega I_2 \\ U_2 = \Omega I_1 - \Delta I_2 \end{cases}$$

Du moment que  $Z_c = Z_e = Z_K$ , on peut écrire :

$$U_1 = Z_K I_1 \quad \text{et} \quad U_2 = Z_K I_2.$$

Il vient :

$$U_1 = \Delta I_1 - \Omega I_2 = Z_K I_1 \dots \dots (1)$$

$$U_2 = \Omega I_1 - \Delta I_2 = Z_K I_2 \dots \dots (2)$$

d'où :

$$Z_K = \Delta - \Omega \frac{I_2}{I_1} \dots \dots (3)$$

$$Z_K = \Omega \frac{I_1}{I_2} - \Delta \dots \dots (4)$$

Par élimination du rapport  $\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$  entre les relations (3) et (4) on aura :

$$(3) \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{\Delta - Z_K}{\Omega} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{\Omega}{\Delta - Z_K}$$

Injectons  $\frac{I_1}{I_2}$  dans (4) on obtient :

$$(4) \Rightarrow Z_K = \Omega \left( \frac{\Omega}{\Delta - Z_K} \right) - \Delta \Rightarrow Z_K(\Delta - Z_K) = \Omega^2 - \Delta(\Delta - Z_K)$$

$$Z_K^2 = \Delta^2 - \Omega^2 \quad \text{donc: } Z_K = \sqrt{\Delta^2 - \Omega^2}$$

Soit :

$$Z_K = \sqrt{Z_1 Z_2 \left( 1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right)}$$

Quand l'impédance du récepteur a cette valeur, on dit que c'est l'impédance caractéristique (ou itérative).

- Déterminons  $Z_K$  dans le cas où on a le schéma d'un quadripôle en  $\pi$ .

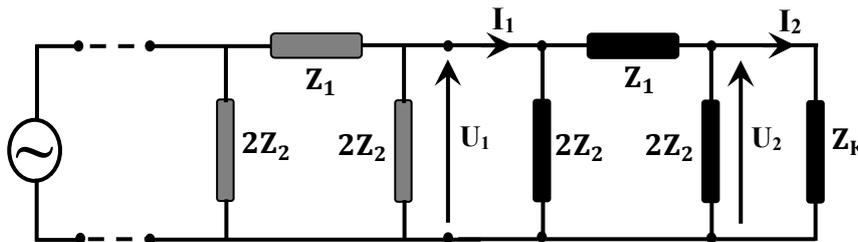


Figure.6.3

Équations du quadripôle pour l'association de quadripôles en cascade :

$$U_1 = A U_2 + B I_2$$

$$I_1 = C U_2 + D I_2$$

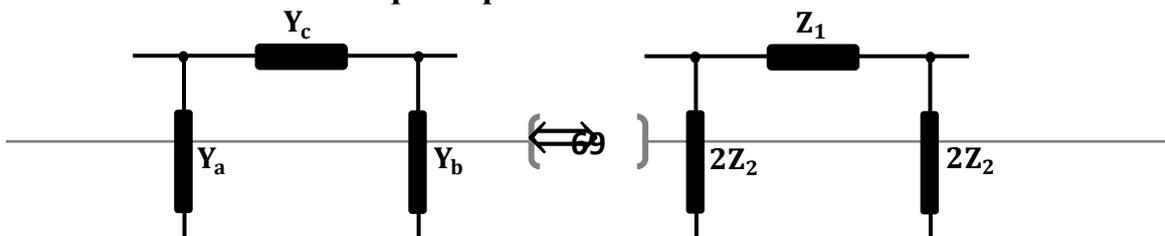
Les coefficients **A**, **B**, **C** et **D** sont les paramètres de chaîne. L'impédance d'entrée  $Z_e$  d'un quadripôle quelconque chargé avec une impédance de charge  $Z_c$  est donnée par les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} Z_e I_1 &= A Z_c I_2 + B I_2 \\ I_1 &= C Z_c I_2 + D I_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z_e = \frac{A Z_c + B}{C Z_c + D}$$

Lorsque le quadripôle est symétrique on a :

$$Z_e = Z_c = Z_K \quad \text{et} \quad A = D; \quad \text{d'où: } Z_K = \frac{A Z_K + B}{C Z_K + D} \Rightarrow C Z_K^2 - B = 0 \Rightarrow Z_K = \sqrt{\frac{B}{C}}$$

- Détermination des paramètres de chaîne **A**, **B**, **C** et **D**, en fonction des paramètres admittance du quadripôle en  $\pi$ .



Équations du quadripôle en  $\pi$  :

$$\mathbf{I}_1 = (\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_c)\mathbf{U}_1 - \mathbf{Y}_c\mathbf{U}_2$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{Y}_c\mathbf{U}_1 - (\mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_c)\mathbf{U}_2$$

On bascule vers les équations décrivant la matrice chaîne, en exprimant les deux grandeurs fonctions  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{I}_1$ , en fonction des deux variables  $\mathbf{U}_2$  et  $\mathbf{I}_2$ , et on obtient :

$$\mathbf{U}_1 = \left(\frac{\mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_c}{\mathbf{Y}_c}\right)\mathbf{U}_2 + \frac{1}{\mathbf{Y}_c}\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{I}_1 = \left(\frac{\mathbf{Y}_a\mathbf{Y}_b}{\mathbf{Y}_c} + \mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b\right)\mathbf{U}_2 - \left(\frac{\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_c}{\mathbf{Y}_c}\right)\mathbf{I}_2$$

Sachant que :

$$\mathbf{Y}_a = \mathbf{Y}_b = \frac{1}{2\mathbf{Z}_2} ; \mathbf{Y}_c = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} \text{ d'une part, } \mathbf{B} = \frac{1}{\mathbf{Y}_c} = \mathbf{Z}_1, \text{ et } \mathbf{C} = \frac{\mathbf{Y}_a^2}{\mathbf{Y}_c} + 2\mathbf{Y}_a = \frac{1}{\mathbf{Z}_2\left(\frac{\mathbf{Z}_1}{4\mathbf{Z}_2} + 1\right)}$$

d'autre part, il vient :

$$\mathbf{Z}_K = \sqrt{\frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\left(\frac{\mathbf{Z}_1}{4\mathbf{Z}_2} + 1\right)}}$$

### 6.3) Détermination des fréquences de coupure (quadripôle en T)

Le filtre étant supposé sans pertes,  $\Lambda$  et  $\Omega$  sont des imaginaires purs, on peut donc poser :  $\Lambda = ja$  et  $\Omega = jb$

$a$  et  $b$  sont des quantités réelles positives dans le cas des inductances, négatives pour les condensateurs.

Appelons **gain** le rapport  $\mathbf{G} = \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{U}_1}$  (On lui donne également le nom de coefficient

de transmittance ou de (fonction de transfert), et **affaiblissement** le rapport  $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{U}_2}$

D'après les relations (1) et (2) on a :  $\left. \begin{array}{l} \mathbf{U}_1 = \mathbf{Z}_c\mathbf{I}_1 \\ \mathbf{U}_2 = \mathbf{Z}_c\mathbf{I}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{I}_1/\mathbf{I}_2.$

Reportons cette valeur dans (4), il vient :

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta}{\Omega} + \frac{\mathbf{Z}_c}{\Omega} = \frac{a}{b} \pm j \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$$

On peut distinguer deux cas :

**1<sup>ère</sup> cas** :  $a^2 < b^2$  ( soit  $-1 < a/b < 1$  ).

On peut poser  $a/b = \cos \varphi$  et l'on a :  $\mathbf{F} = \cos \varphi \pm j \sin \varphi = e^{\pm j\varphi}$

Soit :  $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 \angle \pm \varphi$

Pour les fréquences comprises dans ce domaine ( $-1 < a/b < 1$ ), les intensités à la sortie et à l'entrée du quadripôle ont même valeur, seule la phase à changé.

**2<sup>ème</sup> cas** :  $a^2 > b^2$  ( soit  $|a| > |b|$  ).

On peut poser  $a/b = \cosh \varphi$  et l'on a :

$$\mathbf{F} = \cosh \varphi \pm j \sinh \varphi = e^{\pm \varphi} = m \quad \text{soit : } \mathbf{I}_1 = m \mathbf{I}_2$$

Le courant de sortie est en phase avec le courant d'entrée mais son amplitude a diminué. En définitif, la bande passante du filtre est définie par le domaine suivant :

$$-1 < a/b < 1$$

**A l'intérieur de la bande passante, l'intensité conserve sa valeur mais sa phase varie, à l'extérieur de la bande passante l'intensité diminue mais sa phase ne varie pas.**

Ainsi, en choisissant un nombre convenable de quadripôles est-il possible de réaliser, à l'extérieur de la bande, l'affaiblissement désiré. Si l'affaiblissement d'une cellule est  $m_1 = e^\varphi$ , pour n filtres, il a pour valeur  $m = e^{n\varphi}$ .

## 6.4) Applications

### 6.4-1) Filtre passe bas

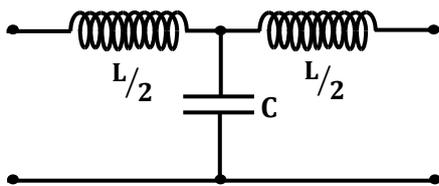


Figure.6.4

Il est constitué par deux inductances en série, et par un condensateur en dérivation (fig.6.4).

Appliquons à ce quadripôle la relation qui définit la bande passante.

$$-1 < a/b < 1$$

$$a = \frac{L\omega}{2} - \frac{1}{C\omega} ; \quad b = -\frac{1}{C\omega} \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{b} = 1 - \frac{LC\omega^2}{2}$$

On a donc : 
$$-1 < 1 - \frac{LC\omega^2}{2} < 1$$

Soit : 
$$0 < \omega < \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

C'est donc bien un filtre **passé bas** ; les pulsations de coupure ont pour valeur :

$$\omega_1 = 0 \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

### 6.4-2) Filtre passé haut

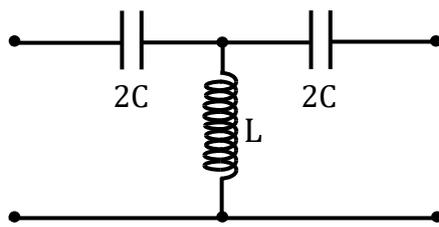


Figure.6.5

Si l'on permute les Inductances et les capacités d'un filtre passé bas , on obtient un filtre qui bloque les fréquences basses, alors qu'il laisse passer librement les fréquences élevées, c'est un filtre **passé haut** (fig.6.5).

Déterminons sa bande passante :

$$a = -\frac{1}{2C\omega} + L\omega \quad ; \quad b = L\omega \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2LC\omega^2}$$

On a : 
$$-1 < 1 - \frac{1}{2LC\omega^2} < 1$$

Soit : 
$$\frac{1}{2\sqrt{LC}} < \omega < \infty$$

les pulsations de coupure sont :

$$\omega_1 = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \infty$$

C'est donc bien un filtre **passé haut**.

### 6.4-3) Filtre passé bande

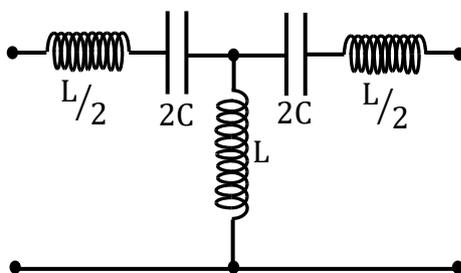


Figure.6.6

Le filtre le plus simple est représenté par la (fig.6.6).

En effet, calculons sa bande passante:

$$a = \frac{L\omega}{2} - \frac{1}{2C\omega} + L\omega = \frac{3}{2}L\omega - \frac{1}{2C\omega} \quad \text{et} \quad b = L\omega$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{a}{b} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2LC\omega^2}$$

On doit avoir alors la relation :

$$-1 < \frac{3}{2} - \frac{1}{2LC\omega^2} < 1$$

Soit :  $\frac{1}{\sqrt{5LC}} < \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}$

C'est belle et bien un filtre **passé bande**, dont les fréquences de coupure sont :

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{5LC}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

#### 6.4-4) Filtre coupe bande

Le filtre coupe bande que nous nous proposons de définir sa bande passante, est représenté par le circuit (fig.6.7).

-Détermination des fréquences de coupures :

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{L\omega}{1 - LC\omega^2} + 3 \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \\ b &= 3 \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 - \frac{LC\omega^2}{3(LC\omega^2 - 1)^2}$$

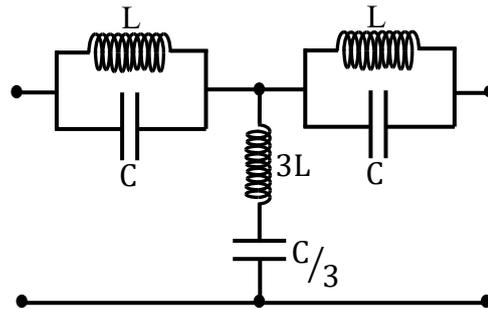


Figure.6.7

La condition à l'aide de laquelle on peut définir la bande passante, est donnée par l'expression :

$$-1 < 1 - \frac{LC\omega^2}{3(LC\omega^2 - 1)^2} < 1$$

Calculons les fréquences de coupures en utilisant tout d'abord l'équation de gauche.

$$-1 < 1 - \frac{LC\omega^2}{3(LC\omega^2 - 1)^2} \Leftrightarrow (LC\omega^2 - 1)^2 - \frac{LC\omega^2}{6} > 0$$

Cette expression est de la forme :  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

On aura donc :

$$\left[ (LC\omega^2 - 1) + \sqrt{\frac{LC}{6}} \omega \right] \left[ (LC\omega^2 - 1) - \sqrt{\frac{LC}{6}} \omega \right] > 0$$

$$\left( LC\omega^2 + \sqrt{\frac{LC}{6}} \omega - 1 \right) \left( LC\omega^2 - \sqrt{\frac{LC}{6}} \omega - 1 \right) > 0$$

Pour résoudre cette inéquation il faut que les expressions :

$\left( LC\omega^2 + \omega\sqrt{\frac{LC}{6}} - 1 \right)$  et  $\left( LC\omega^2 - \omega\sqrt{\frac{LC}{6}} - 1 \right)$  soient négatives ou positives simultanément.

En se débarrassant des deux racines négatives, il nous reste les deux racines positives représentant les fréquences de coupures.

Il vient alors :  $\omega_{c1} = \frac{0,81}{\sqrt{LC}}$  pour  $\left( LC\omega^2 + \sqrt{\frac{LC}{6}} \omega - 1 \right) > 0$

$\omega_{c1} = \frac{1,22}{\sqrt{LC}}$  pour  $\left( LC\omega^2 - \sqrt{\frac{LC}{6}} \omega - 1 \right) > 0$

solution de l'équation de droite :

$$1 - \frac{LC\omega^2}{3(LC\omega^2 - 1)^2} < 1 \Leftrightarrow -\frac{LC\omega^2}{3(LC\omega^2 - 1)^2} < 0$$

Cette équation est toujours vérifiée quelque soit la valeur de  $\omega$ .

L'intervalle de la bande passante où l'équation  $-1 < a/b < 1$  est vérifiée, est donné dans le tableau ci-dessous :

En posant :  $LC\omega^2 + \sqrt{\frac{LC}{6}} \omega - 1 = \Psi$  et  $LC\omega^2 - \sqrt{\frac{LC}{6}} \omega - 1 = \Phi$

Dans le tableau ci-dessous, on peut montrer le domaine délimitant les zones où l'équation  $-1 < a/b < 1$  est vérifiée.

|                   | 0 | $\frac{0,81}{\sqrt{LC}}$ | $\frac{1,22}{\sqrt{LC}}$ | $+\infty$ |   |
|-------------------|---|--------------------------|--------------------------|-----------|---|
| $\Psi$            | - | 0                        | +                        | +         |   |
| $\Phi$            | - | -                        | 0                        | +         |   |
| $\Psi \cdot \Phi$ | + | 0                        | -                        | 0         | + |

Les intervalles où le produit  $\Psi \cdot \Phi$  est positif, représentent la bande passante du filtre.

Donc l'intervalle de la bande passante est :  $\omega \in \left] 0, \frac{0,81}{\sqrt{LC}} \right[ \cup \left] \frac{1,22}{\sqrt{LC}}, \infty \right[$ .

D'où la nature du filtre : << **Filtre coupe bande** >>.

## DIAGRAMME DE BODE

C'est la méthode qui consiste à étudier la réponse du système en régime sinusoïdal par la représentation des courbes d'amplitude et de phase.

### 6.5) Courbes d'amplitude et de phase

Pour l'étude de la réponse en fréquence d'amplificateurs en cascade, chaîne d'asservissement..., on fait appel au **diagramme de Bode** qui est basé sur la représentation séparée en fonction de la fréquence des courbes d'amplitude et de phase. Pour cela, nous allons raisonner successivement sur des systèmes du premier et second ordre.

#### 6.5-1) Système électrique du 1<sup>ère</sup> ordre

Considérons le circuit électrique (fig.6.8a).

En régime sinusoïdal, on peut écrire avec les

notations complexes : 
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{R+jL\omega} = \frac{1}{1+j\frac{L\omega}{R}}$$

On en déduit le gain : 
$$G = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec  $\omega_0 = \frac{R}{L}$  représentant la pulsation constante du circuit.

On peut alors représenter le système précédent (fig.6.8a)

sous la forme d'un bloc renfermant le gain  $G$  et considérer que pour la sollicitation sinusoïdale  $U_1$  appliquée à l'entrée (fig.6.8b) la réponse en régime harmonique est  $U_2 = G U_1$ .

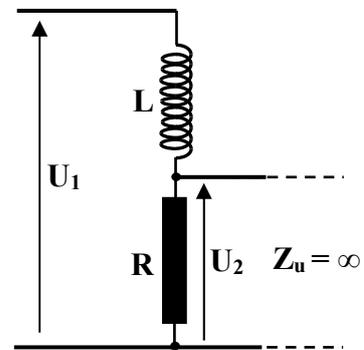


Figure.6.8a

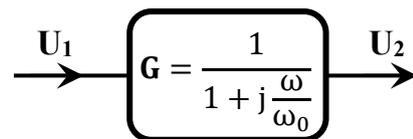


Figure.6.8b

Comme l'amplificateur comporte plusieurs étages, on a pensé qu'il était plus intéressant d'exprimer le gain sous la forme d'un logarithme, ce qui permet d'ajouter les gains au lieu de les multiplier, quand on désire obtenir le gain de l'ensemble.

**Le gain en bels est égal au logarithme à base dix du gain  $G = \frac{U_2}{U_1}$ .**

En pratique le **bel** est une unité trop grande et on lui préfère le **décibel**. Pour éviter toute confusion entre le gain en décibel et le gain proprement dit, nous les représenterons respectivement par une petite et par une grande lettre.

En définitif :

$$g = 20 \log G$$

### 6.5-1a) Courbe d'amplitude

On représente en premier lieu la courbe de l'amplitude (ou module) du gain en tension en fonction de la pulsation  $\omega$  (fig.6.9).

On adopte pour l'axe des pulsations une échelle logarithmique et l'on exprime le gain en décibels, soit :

$$g = 20 \log |G| = 20 \log \frac{1}{\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2}} = -10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

Pour obtenir avec précision cette courbe, on détermine d'abord ses asymptotes :

Pour les fréquences très faibles lorsque  $\omega \ll \omega_0$  on aura :

$g = -10 \log(1) = 0$ . Ainsi l'horizontale d'ordonnée  $g = 0$  constitue **une première asymptote**.

Aux fréquences élevées quand  $\omega \gg \omega_0$  on aura :

$$g = -10 \log \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \Rightarrow g = -20 \log \omega + 20 \log \omega_0$$

Ainsi **la deuxième asymptote** est :

$$g = -20 \log \omega + 20 \log \omega_0$$

Pour  $\omega = \omega_0$  on a  $g = 0$ . Pour  $\omega = 10\omega_0$  on a  $g = -20$  dB.

C'est une droite qui passe par les points de coordonnées  $(\omega_0, 0)$  et  $(10\omega_0, -20)$ . Sa pente étant de  $-20$  dB/décade.

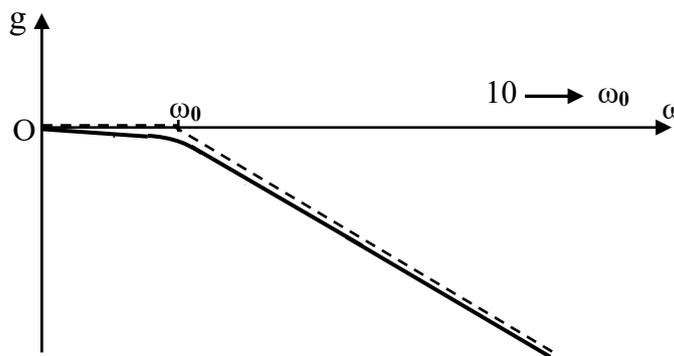


Figure.6.9

### 6.5-1b) Courbe de phase

On peut avec la même échelle que précédemment pour la pulsation, représenter un

deuxième diagramme pour la phase, soit  $\varphi = f(\omega)$ ,  $\varphi$  étant habituellement exprimé en degrés (fig.6.10). Comme la phase du gain  $G$  est :

$$\varphi = -\text{Arctg} \frac{\omega}{\omega_0}$$

Il est facile de représenter à nouveau les asymptotes.

Pour  $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \varphi = -\text{Arctg} \infty \Rightarrow \varphi = -90^\circ$ . Ainsi l'horizontale d'ordonnée

$\varphi = -90^\circ$  est la première asymptote. Pour  $\omega \ll \omega_0$ ,  $\varphi = -\text{Arctg} 0 \Rightarrow \varphi = 0^\circ$ , ce qui détermine la deuxième asymptote.

Enfin, pour  $\omega = \omega_0$ , on obtient un point particulier de la courbe, soit  $\varphi = -45^\circ$ . Grâce aux asymptotes et à ce point, il est possible d'obtenir avec précision la réponse en phase (fig.6.10).

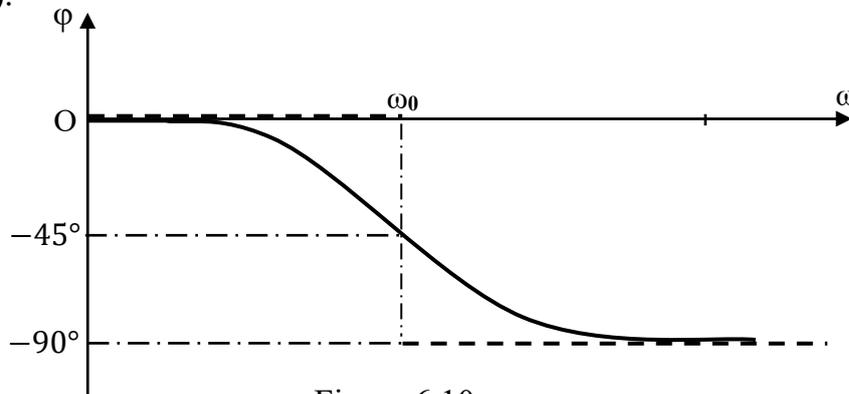


Figure.6.10

### 6.5-2) Système électrique du 2<sup>ème</sup> ordre

Considérons le système électrique (fig.11), avec les notations complexes on a :

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{U}_1} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + j^2 LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Si l'on adopte les notations du calcul opérationnel, on peut encore écrire en posant  $p = j\omega$  :

$$\mathbf{G} = \frac{1}{p^2 LC + pRC + 1} = \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC}}$$

Posons :  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  ; on sait que  $Q = \frac{L\omega_0}{R} \Rightarrow \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$  ;

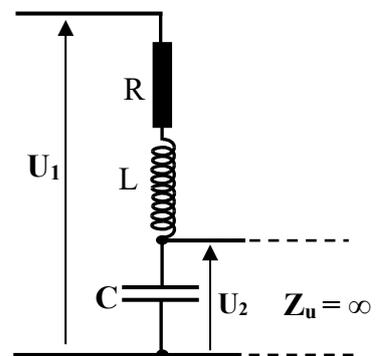


Figure.11

$$\text{donc : } \mathbf{G} = \frac{1}{p^2 + \frac{\omega_0}{Q} p + \omega_0^2} = \frac{1}{p^2 + m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

$\omega_0$  est la pulsation de résonance,  $Q$  le coefficient de qualité et  $m = \frac{1}{Q}$ . Le dénominateur de  $\mathbf{G}$  est une équation du deuxième degré en  $p$ , il a pour racines  $p_1$  et  $p_2$ , ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{G} = \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

Ces racines sont réelles ou complexes selon le signe de  $\Delta$  :

$$\Delta = m^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2(m^2 - 4)$$

Si  $m > 2$ , elles sont réelles, et on a :  $p_1, p_2 = \frac{-m\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{m^2-4}}{2}$

Si  $m = 2$ , la racine est double, et on a :  $p_1 = p_2 = \frac{-m\omega_0}{2}$

Si  $m < 2$ , elles sont complexes, et on a :  $p_1, p_2 = \frac{-m\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{m^2-4}}{2}$

### Diagramme de Bode

Comme pour le système du premier ordre, nous nous proposons de représenter les courbes d'amplitude et de phase du gain en fonction de la pulsation. Nous prendrons pour paramètre le coefficient  $m$ .

#### **6.5-2a) Courbe d'amplitude**

Le gain à pour expression :

$$\mathbf{G} = \frac{1}{1 + j^2LC\omega^2 + jRC\omega} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On sait que :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ et } Q = \frac{1}{RC\omega_0} \Rightarrow RC = \frac{1}{Q\omega_0} \text{ sans oublier } m = \frac{1}{Q} \Rightarrow RC = \frac{m}{\omega_0} \text{ en}$$

remplaçant tout ça dans  $\mathbf{G}$  :

$$\mathbf{G} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + jm \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\text{On en déduit le module de } \mathbf{G} : |\mathbf{G}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

Puis l'expression du gain en décibels :

$$g = 20\log|G| = -20\log\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + m^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

► pour  $m = 2$ .

$$g = -20\log\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -20\log\sqrt{1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4} - 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 4\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -20\log\sqrt{1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4} + 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$g = -20\log\sqrt{\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2} = -20\log\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

\* Pour  $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \gg 1$  donc  $g = -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \Rightarrow g = -40\log\omega + 40\log\omega_0$

C'est l'équation d'une asymptote de la forme  $y = a x + b$ . Donnons des points particuliers pour effectuer un tracé précis de cette asymptote.

Pour  $\omega = \omega_0$  on a  $g = 0$

Pour  $\omega = 10 \omega_0$  on a  $g = -40$  dB.

\* Pour  $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \ll 1$ ,  $g = -20\log 1 = 0$ . Ainsi l'axe des abscisses représente la

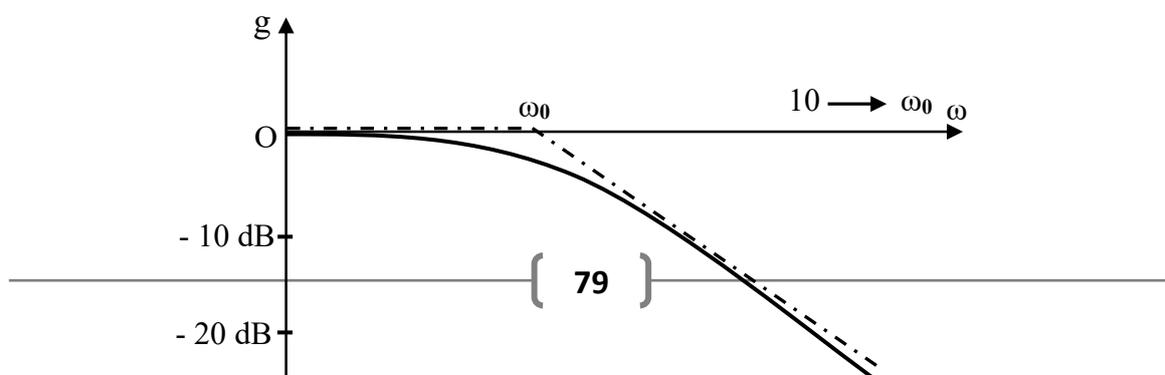
deuxième asymptote, dans l'intervalle  $[0, \omega_0]$ . (fig.6.12).

► pour  $m > 2$ .

Dans ces conditions, un système du deuxième ordre peut se ramener au produit de deux systèmes du premier ordre qu'il est facile de représenter, mais ces valeurs de  $m$  sont sans intérêt pratique.

► pour  $m < 2$ .

Si  $\omega \ll \omega_0$ ,  $g = 0$  et si  $\omega \gg \omega_0$ ,  $g = -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ , sont les asymptotes pour la famille de courbes pour les différentes valeurs de  $m$ . D'autre part, chacune des courbes passe par une valeur maximale (phénomène de résonance) pour la valeur de  $\omega$  qui annule la dérivée de l'expression sous le radical. Cette pulsation de résonance n'existe que si l'expression sous le radical est positive.



### 6.5-2b) Courbe de phase

$G = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + jm \frac{\omega}{\omega_0}}$  pour  $m = 2$  alors  $\varphi = -\text{Arctg} \left( \frac{2 \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)$ . Il est donc facile de représenter les asymptotes.

Pour  $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \ll 1 \Rightarrow 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1$ , et  $2 \frac{\omega}{\omega_0} \approx 0$ , donc  $\varphi = 0^\circ$ , ainsi l'horizontale d'ordonnée nulle est-elle la première asymptote.

Pour  $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \gg 1 \Rightarrow 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$  par substitution dans  $\varphi$ , on a :  $\varphi =$

$$-\text{Arctg} \left( \frac{2}{\frac{\omega}{\omega_0}} \right) = -\text{Arctg} \left( \frac{2}{\infty} \right) = -\text{Arctg} 0, \text{ d'où } \varphi = -180^\circ.$$

Ce qui détermine la deuxième asymptote  $\varphi = -180^\circ$  dans le domaine  $[\omega_0, \infty]$ .

D'autre part, cette courbe passe par le point particulier correspondant à :

$\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = -\text{Arctg} \left( \frac{2}{0} \right) = -\text{Arctg} \infty$ , donc  $\varphi = -90^\circ$ . Notre point particulier est :

$(\omega_0, -90^\circ)$

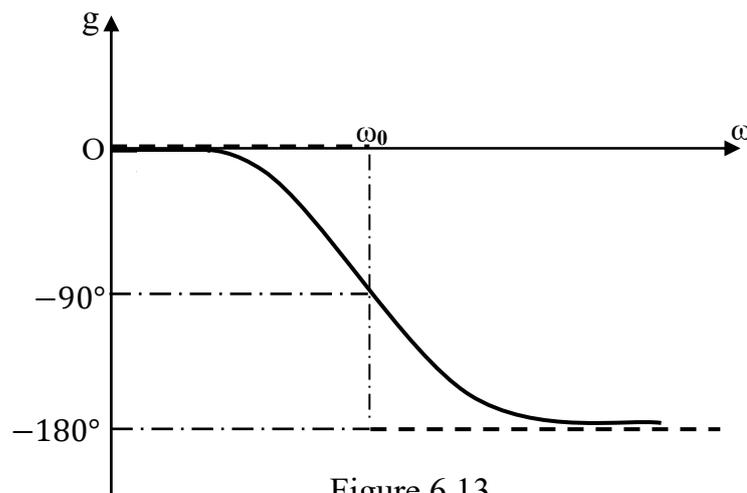


Figure.6.13

