Chapitre IV

Les Filtres Actifs

Introduction :

Les filtres actifs sont constitués uniquement de résistances, de condensateurs et d'éléments actifs (amplificateurs opérationnels la plupart du temps).

Ils présentent les avantages suivants :

⇒ Encombrement réduit

⇒ Faciles à réaliser donc moins coûteux.

Cependant, les composants actifs limitent leur usage aux fréquences basses (typiquement jusqu'à quelques dizaines de MHz) et présentent les inconvénients suivants :

⇒ Introduisent du bruit
⇒ Limitent la tension maximale filtrable
⇒ Nécessitent une alimentation

Les filtres actifs se réalisent le plus souvent par la mise en cascade de cellules élémentaires du Second ordre (plus un circuit du premier ordre pour les filtres d'ordre impair). Cette mise en cascade impossible à réaliser avec des éléments passifs devient très aisée dans le cas de circuits actifs, car chaque circuit élémentaire possède une impédance d'entrée élevée et une impédance de sortie faible.

Cependant, les filtres obtenus par cette méthode sont très sensibles aux dérives des valeurs des composants. Des filtres à hautes performances peuvent être obtenus à partir d'un prototype LC simulé à l'aide de composants actifs de façon à faire disparaître les inductances (filtres à gyrateur).

Définition :

La fonction filtrage de fréquence sert à assurer la suppression (atténuation) des signaux de fréquences non désirée (parasites, bruits etc.) et conserver ou même amplifier, les signaux de fréquence désirée.

Pour un signal périodique quelconque considéré comme somme d'une série de Fourier

$$f(t)= a_0+ \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$: terme harmonique de rang n (de pulsation $n\omega$).

avec $\omega = 2\pi /T$ la pulsation du signal.

Filtrer ce signal, c'est choisir, parmi les harmoniques (les termes de la somme), ceux qu'on désire transmettre et éliminer les autres. Les filtres se présentent sous différentes formes.

Lorsqu'il n'y a pas d'amplification de la puissance du signal d'entrée par un élément actif

(transistor, ALI), il est passif ; dans le cas contraire il est actif.
Les filtres peuvent être classés selon leurs natures (analogiques, numériques), selon leur composants (actifs, passifs) ou selon leurs degrés.
Nous allons dans la suite de ce cours nous intéresser aux filtres actifs (utilisant des composants actifs tels que les amplificateurs opérationnels ou les transistors) de premier et de second ordre.

1 Diagrammes de Bode

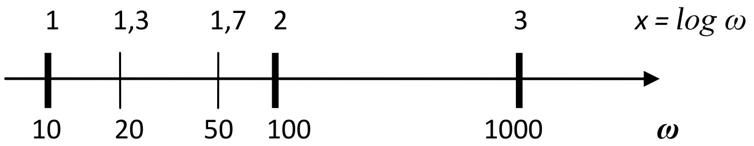
Afin de tracer les diagrammes de Bode correspondants à une fonction de transfert $H(j\omega)$, Il faut tout d'abord commencer par exprimer le gain *GdB*, le gain en décibel, ainsi que le déphasage φ en fonction de la fréquence ou de la pulsation ω avec :

$$GdB = 20 \, Log\,(|H(jw)|)$$

$$Et \; \varphi = arg(H(jw))$$

Pour représenter graphiquement le gain et la phase sur un large domaine de fréquences, on utilise une échelle logarithmique. On représente donc en abscisse (log ω). On représente parfois *log f, ou* $\log u = \log \frac{\omega}{\omega o}$

Le diagramme de Bode est constitué des deux courbes :
Le gain $G(dB) = f\,(\log \omega)$ et l'argument $\varphi = f\,(\log \omega)$
Pour la pulsation $\omega 1$, on définit $x1 = \log \omega 1$. Pour la pulsation $\omega 2$, on définit $x2 = \log \omega 2$
L'écart entre *x1 et x2 est :* $\Delta x = x2 - x1 = \log \omega 2 - \log \omega 1 = \log \frac{\omega 2}{\omega 1}$



- *Si ω2 = 2ω1, on a Δx = log 2 = 0,3. On dit qu'on a une octave.*
- *Si ω2 = 10ω, on a Δx = log10 = 1. On dit qu'on a une décade.*

2 Pulsation de coupure à –3 dB :

C'est la pulsation ωc pour laquelle $G(\omega c) = \frac{Gmax}{\sqrt{2}}max$. En prenant le logarithme de cette expression, on a :

$$20\log G(\omega c) = 20\log\left(\frac{Gmax}{\sqrt{2}}\right) = 20\log Gmax - 20\log \sqrt{2}$$

- La première relation est à utiliser pour calculer la pulsation de coupure à –3 dB en utilisant la fonction de transfert.
- La deuxième relation est très pratique pour une détermination graphique à partir du diagramme de Bode.

3 Produit de fonction de transfert :

$\underline{H}(j\omega) = \underline{H}1(j\omega) \cdot \underline{H}1(j\omega)$, alors $\begin{cases} G = G1 \cdot G2 \\ \varphi = \varphi 1 + \varphi 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} GdB = GdB1 \cdot GdB2 \\ \varphi = \varphi 1 + \varphi 2 \end{cases}$

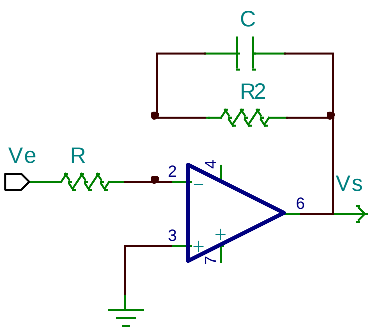
2 Les filtres actifs de premier ordre :

S'appellent aussi filtre à un pole possédant seulement un condensateur. Ces filtres ne peuvent donner que des réponses Passe bas ou passe haut.

Pour les filtres Passe bande ou Coupe bande il faut que l'ordre n soit supérieur à 1.

2.1 Les filtres passe-bas d'ordre 1

Sa structure électronique à base d'A.L.I est la suivante :



Comme son nom l'indique ce type de filtre laissera passer les signaux basses fréquences et atténuer les signaux de hautes fréquences.

Sa fonction de transfert est de la forme :

$$Z = R2 \,//\, Z_C = \frac{\frac{R2}{jC\omega}}{R2 + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R2}{1 + jR2C\omega}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Vs}}{\underline{Ve}} = -\frac{Z}{R} = -\frac{R2}{R + jR2RC\omega} = -\frac{R2}{R} \cdot \frac{1}{1 + jR2C\omega}$$

Pour avoir des expressions simples à interpréter, il faut faire apparaître dès que possible des termes sans dimension tels que $RC\omega$.

Pour mettre cette fonction de transfert sous forme canonique, on pose :

$$\omega o = \frac{1}{R2C} \text{ et } Ho = -\frac{R2}{R}$$

Donc la forme canonique d'un filtre passe-bas du premier ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = Ho\,\frac{1}{1+j\,\frac{\omega}{\omega o}}$$

La fréquence de coupure est : $fc = \frac{1}{2\pi R2C}$

Diagramme de Bode :

- *Diagramme de Bode Pour le gain :*

La méthode est de chercher les asymptotes. Il est plus simple de raisonner directement sur la fonction de transfert que sur le module de la fonction de transfert. On en déduit aussi la phase dans les cas limites.

Si $\omega \to 0 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = 1 \Rightarrow \begin{cases} GdB \to 0 \\ \varphi \to 0 \end{cases}$

Si $\omega \to \infty \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{j\,\frac{\omega}{\omega o}} \Rightarrow \begin{cases} GdB = \frac{\omega}{\omega o} \\ \varphi = -\pi/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} GdB = 20log\ \omega - 20log\ \omega o \\ \varphi = -\pi/2 \end{cases}$

Si on pose y = *20 log* G et $x = log\ \omega$. On a $y = 20\ x_0 - 20\ x$.

C'est l'équation d'une droite de coefficient directeur –20.

- Quand on passe d'une fréquence au double de la fréquence, l'intervalle s'appelle une ***octave***.

Si $x_1 = log\ \omega1$ et $x_2 = log\ 2\omega_1$, $\Delta x = x_2 - x_1 = log\ 2 = 0,3$ et $\Delta y = -30 \times 0,3 = -0,6$

*On a une droite de pente **–6 dB par octave**.*

- Quand on passe d'une fréquence à 10 fois la fréquence, l'intervalle s'appelle une ***décade***.

Si $x_1 = log\ \omega1$ et $x_2 = log\ 2\omega_1$, $\Delta x = x_2 - x_1 = log\ 10 = 1$ et $\Delta y = -20 \times 1 = -20$

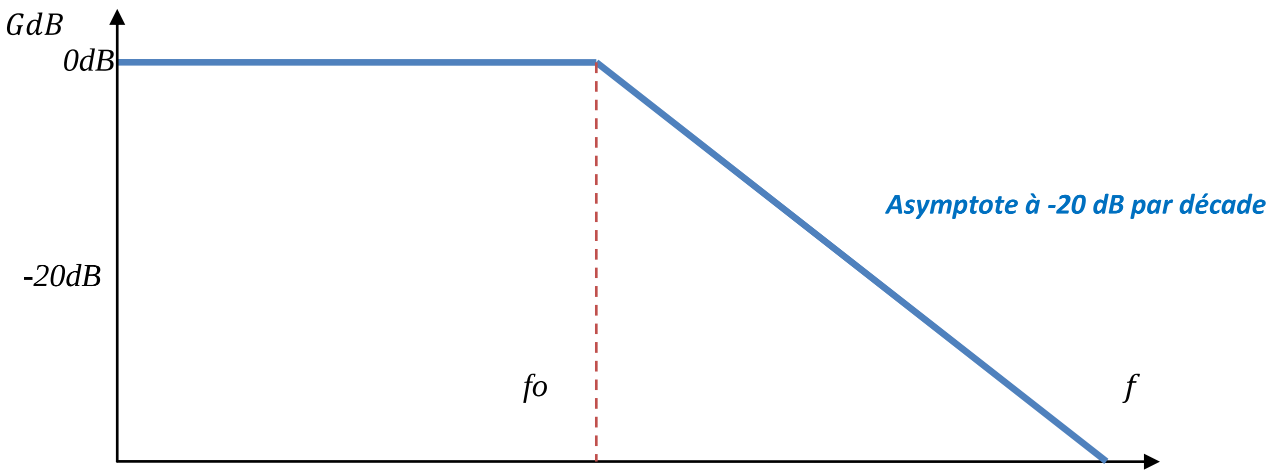
*On a une droite de pente **–20 dB par décade**.*

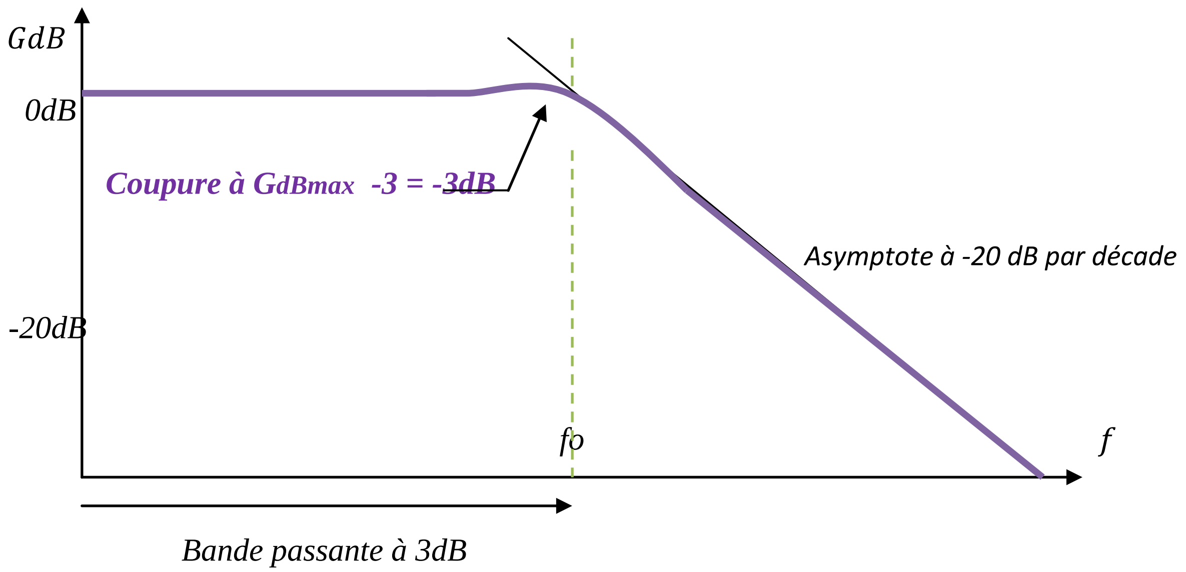
- Intersection des asymptotes : $20log\ \omega o - 20log\ \omega = 0 \Rightarrow \omega = \omega o$

Le point d'intersection a pour abscisse ωo et pour ordonnée 0 dB.

- La courbe réelle vaut pour ω = ωo : $G(\omega o) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow GdB = -3dB$

Diagramme de Bode asymptotique pour le gain (f0 = 1000 Hz)





Pulsation de coupure à –3 dB :

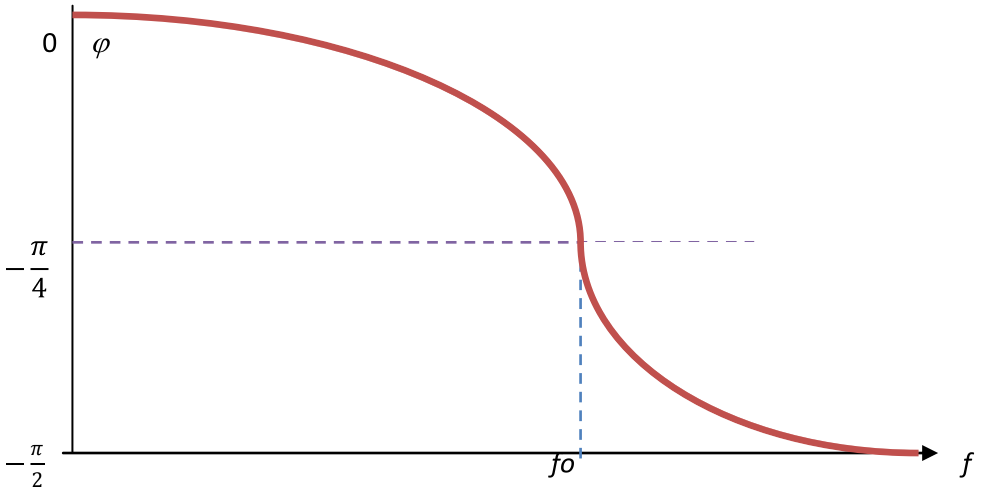
C'est la pulsation ωc pour laquelle $G\ (\omega c\ ) = \frac{Gmax}{\sqrt{2}}$

Calcul de ωc : $G\ (\omega c\ ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega c}{\omega o})^2}} \Rightarrow \omega c = \omega o$

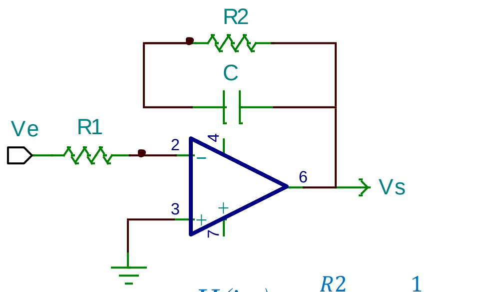
Diagramme de Bode pour la phase :

On se contente des 3 points trouvés précédemment :

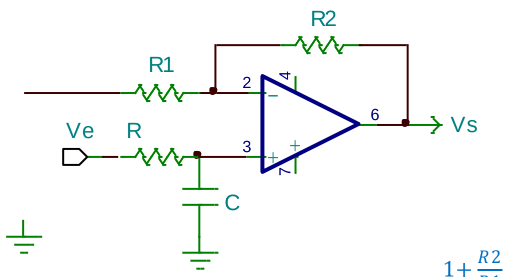
$$\omega = 0 : \varphi = 0 \ ; \ \omega = \omega 0 : \ \varphi = -\frac{\pi}{4} \ ; \ \omega \rightarrow \infty : \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$



Exemples :

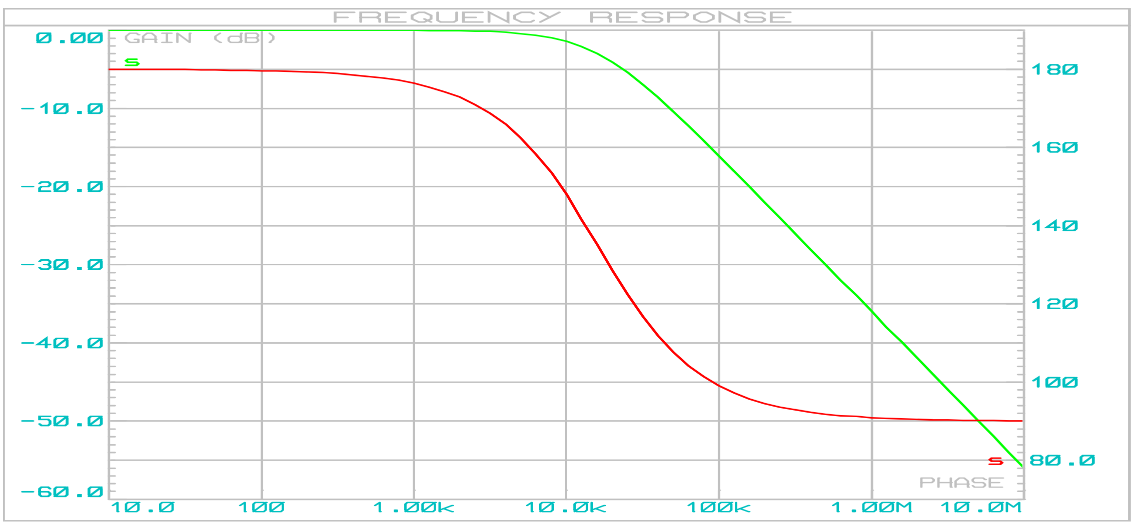


$$H(j\omega)=-\frac{R2}{R1}\cdot\frac{1}{1+j\,RC2\omega}$$



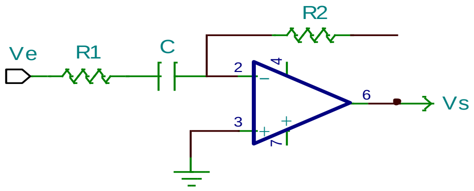
$$H(j\omega)=\frac{1+\frac{R2}{R1}}{1+jRC\omega}$$

Figure 46- Exemples de filtres Passe Bas



2.2 *Filtres passe-haut*

Les filtres passe-haut vont quant à eux laisser passer les hautes fréquences au dépend des basses fréquences. Leur forme générale est la suivante :



$$Z = R2 // Z_C = \frac{\frac{R2}{jC\omega}}{R2+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{R2}{1+jR2C\omega} \qquad .Z_c = R1 + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1+jR1C\omega}{jC\omega}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Vs}}{\underline{Ve}} = -\frac{R2}{Z} = -\frac{R2}{\frac{1+jR1C\omega}{jC\omega}} = -\frac{jR2c\omega}{1+JR1C\omega}$$

Fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Vs}}{\underline{Ve}} = -\frac{jR2c\omega}{1+JR1C\omega}$$

Pour mettre cette fonction de transfert sous forme canonique, on pose : $\omega o = \frac{1}{RC}$, et $\omega 1 = \frac{1}{R2C}$

$Ho = 1$.

Donc la forme canonique d'un filtre passe-haut du premier ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = Ho\frac{j\frac{\omega}{\omega 1}}{1+j\frac{\omega}{\omega o}}$$

On retrouve le comportement limite prévu précédemment sans calcul. Le degré du dénominateur est égal à 1 et celui du numérateur vaut 1. Le filtre est donc un passe-haut du premier ordre.

Les diagrammes de Bode sont tracés de la même manière que celui du passe-bas :

Diagramme de Bode :

Diagramme de Bode pour le gain 1ère méthode

Si $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = j\,\dfrac{\omega}{\omega o} \Rightarrow \begin{cases} G = \dfrac{\omega}{\omega o} \\ \varphi = \pi/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} GdB = 20\log\omega - 20\log\omega o \\ \varphi = \pi/2 \end{cases}$

On a une droite de pente +20 dB par décade.

Si $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = 1 \Rightarrow \begin{cases} GdB = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$

Intersection des asymptotes : $20\log\omega o - 20\log\omega = 0 \Rightarrow \omega = \omega o$

Le point d'intersection a pour abscisse ωo *et pour ordonnée 0 dB.*

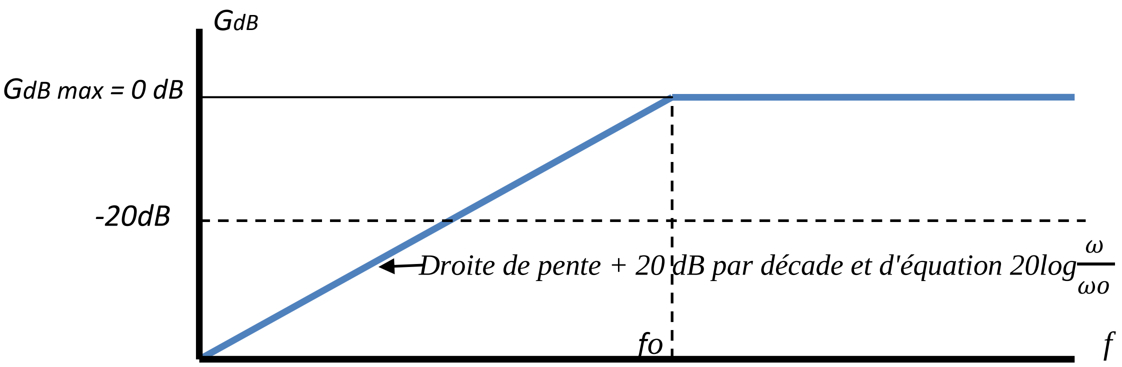
La *courbe réelle vaut pour* $\omega = \omega o$ *: (*ωo *) :* $G(\omega o) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow GdB = -3dB$.

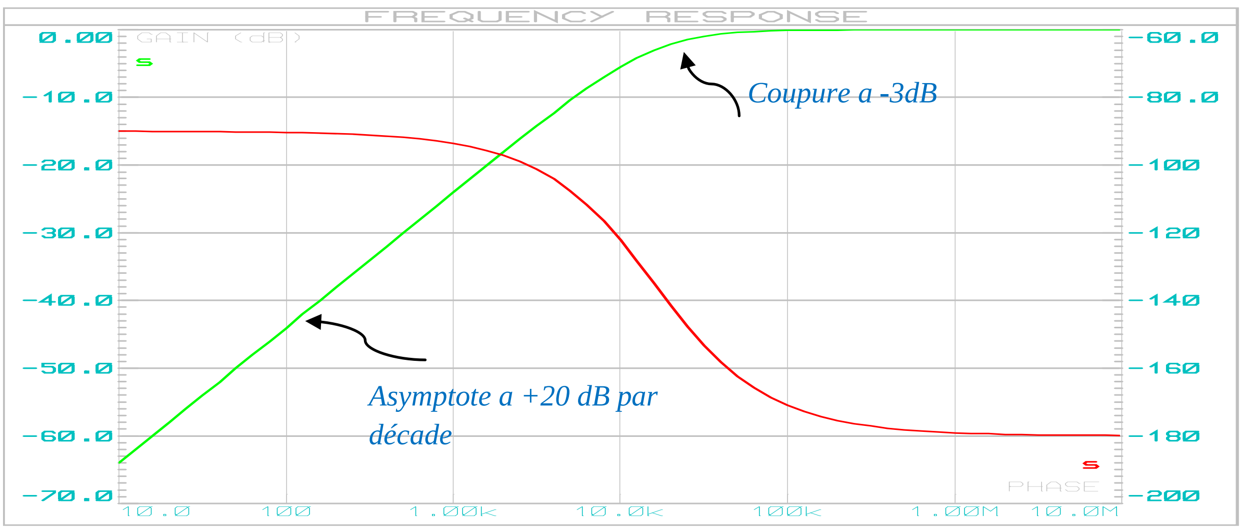
Pulsation de coupure à –3 dB :

C'est la pulsation ωc pour laquelle $G(\omega c) = \dfrac{Gmax}{\sqrt{2}}$

Calcul de ωc *:* $G(\omega c) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\frac{\omega c}{\omega o}}{\sqrt{1+(\frac{\omega c}{\omega o})^2}} \Rightarrow \omega c = \omega o$

Les digrammes Bode correspondant à ce filtre passe-haut sont les suivants pour H >0 :





$$|F(j\omega)| = \left|k\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+\frac{j\omega}{\omega_0}}\right| = \frac{\left|kj\frac{\omega}{\omega_0}\right|}{\left|1+\frac{j\omega}{\omega_0}\right|}$$

$$= \frac{|k|.\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$F_{db} = 20\log(|k|) + 20\log\frac{\omega}{\omega_0} - 10.\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

Pour le calcul du déphasage :

$$\arg\big(F(j\omega)\big) = \arg(k) + \arg(j\frac{\omega}{\omega_0})$$
$$- \arg\left(1+\frac{j\omega}{\omega_0}\right)$$

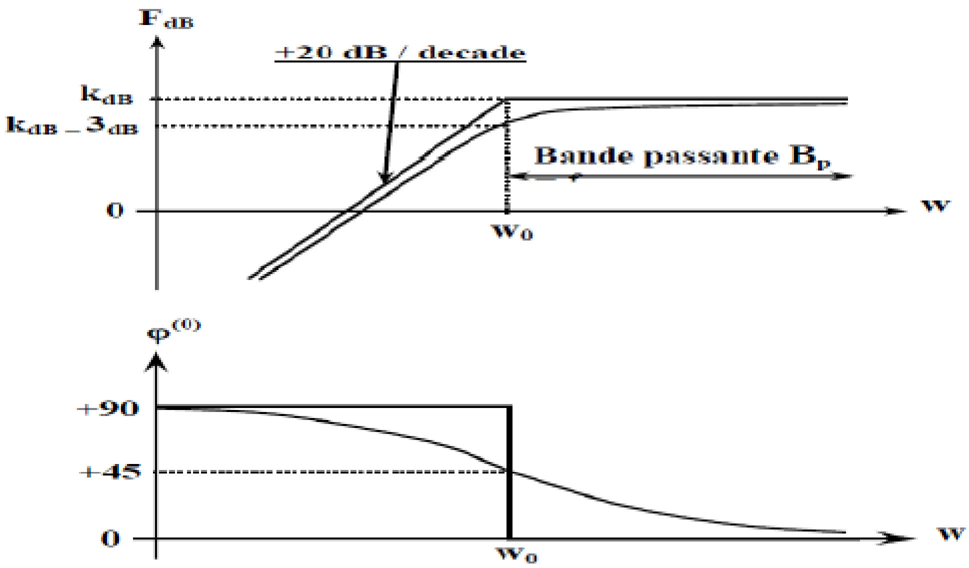
si k>0

$$\arg\big(F(j\omega)\big) = 0 + \frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} - arctg(\frac{\omega}{\omega_0})$$

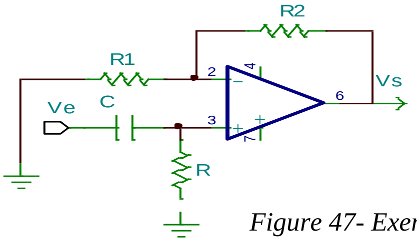
si k>0

$$\arg\big(F(j\omega)\big) = \pi + \frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$
$$= \frac{3\pi}{2} - arctg(\frac{\omega}{\omega_0})$$

Si $\omega \ll \omega_0$	Si $\omega = \omega_0$	Si $\omega \gg \omega_0$
$F_{db}=20\log(\lvert k\rvert)+20.\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ $=k_{db}-20\log\omega_0+20.\log\omega$ C'est une asymptote oblique de pente +20 db Pour la tracer on peut prendre deux valeurs de ω comme par exemple $\omega=\omega_0$ et $\omega=10.\omega_0$	$F_{db}=20\log(\lvert k\rvert)-10.\log((2))$ $=k_{db}-3db$	$F_{db}=20\log(\lvert k\rvert)+20.\log(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ $-10.\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ $=20\log(\lvert k\rvert)$ $=k_{db}$ C'est une asymptote horizontale
Pour k>0 $\varphi=\frac{\pi}{2}-arctg(0)$ $\varphi=\frac{\pi}{2}$ C'est une asymptote horizontale	$\varphi=\frac{\pi}{2}-arctg(1)$ $\varphi=\frac{\pi}{4}$	$\varphi=\frac{\pi}{2}-arctg(\infty)$ $\varphi=0$ C' est une asymptote horizontale
Pour k<0 $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ C'est une asymptote horizontale	$\varphi=\frac{5.\pi}{4}$	$\varphi=\pi$ C' est une asymptote horizontale



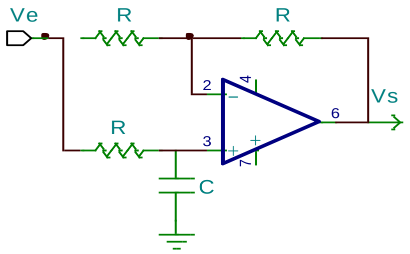
Exemples :



$H(j\omega)=(1+\frac{R2}{R1}).\frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$

Figure 47- Exemples de filtres Passe Haut

2.3 Filtre Passe-Tout du 1er ordre ou déphaseur



Un filtre passe tout a pour forme générale :

$V^- = \frac{Ve+Vs}{2}$; $V^+ = \frac{1}{1+jRC\omega}.Ve$

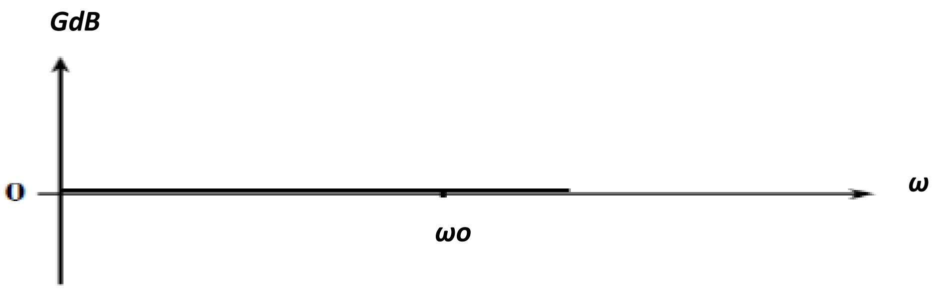
$V^+ = V^- \Rightarrow \frac{Ve+Vs}{2} = \frac{1}{1+jRC\omega}.Ve \Rightarrow \frac{Vs}{Ve} = \frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega} = G(\omega) \Rightarrow |G| = 1 \Rightarrow G_{dB} = 0$

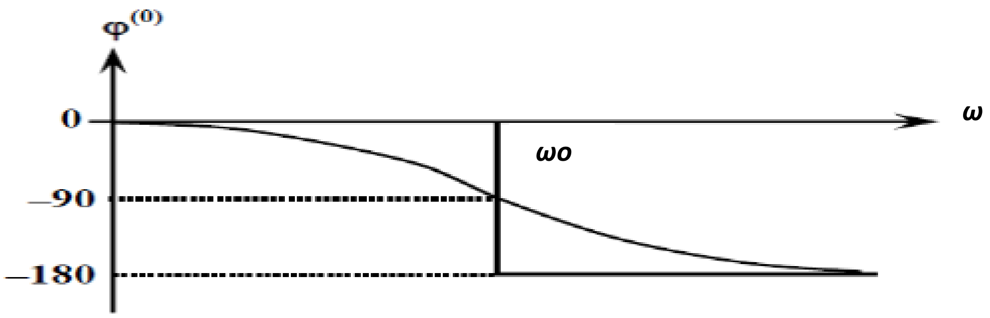
- *Pour le calcul du déphasage :*

$\varphi(j\omega) = Arg(1 - jRC\omega) - Arg(1 + jRC\omega) = -arctg\,(RC\omega) - arctg\,(RC\omega) = -2\,arctg\,(RC\omega)$

$\omega \longrightarrow 0 \Rightarrow \varphi(j\omega) = 0$

$\omega \longrightarrow \infty \Rightarrow \varphi(j\omega) = -\pi$





Ce qui donne le tableau de limites suivant :

Si $\omega \ll \omega_0$	Si $\omega = \omega_0$	Si $\omega \gg \omega_0$
	$F_{db} = 0$	
Pour A=1 $\varphi = 0$ C'est une asymptote horizontale	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	$\varphi = -\pi$ C' est une asymptote horizontale
Pour A=-1 $\varphi = \pi$ C'est une asymptote horizontale	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\varphi = 0$ C' est une asymptote horizontale

Autre Exemple :

$H(j\omega)= \frac{-1+ jRC\omega}{1+jRC\omega}$

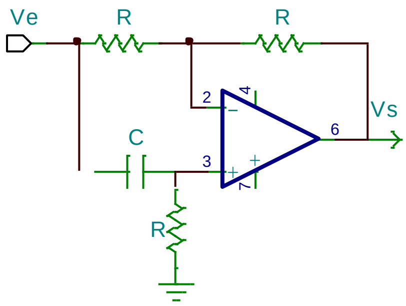
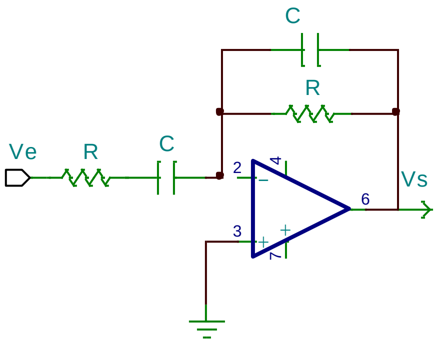


Figure 48- Filtre Passe-Tout ou déphaseur

2.3 Filtre Passe Bande :



$Z1 = R + Zc = \frac{1+jRc\omega}{jc\omega}$

$Z2 = R \,//\, Zc = \frac{R}{1+jRc\omega}$

$$H(j\omega) = -\frac{Z2}{Z1} = \frac{jRc\omega}{\sqrt{(1+jRc\omega\,)^2}}$$

3 Filtres actifs de second ordre

Pour les filtres actifs de second ordre, plusieurs structures existent, deux seront utilisées dans ce cours, à savoir *la structure de Rauch* et celle de *Sallen et Key*.

Une étude générale des deux structures permettra par la suite de déduire les différents types de filtres.

3.1 Structure de Rauch

Elle est présentée par la figure suivante :

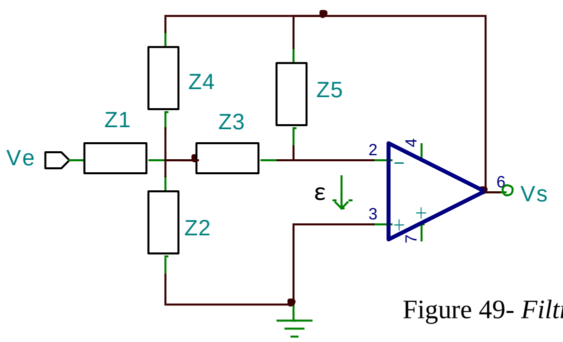


Figure 49- *Filtres actifs de second ordre*

Afin de calculer la fonction de transfert de cette structure, le théorème de Millman dans les trois nœuds N, V+ et V- sera utilisé.

$$V- = \frac{\frac{VN}{Z3}+\frac{Vs}{Z5}}{\frac{1}{Z3}+\frac{1}{Z5}} \quad ; \quad V+ = 0$$

$$\Rightarrow VN = \frac{\frac{Ve}{Z1}+\frac{0}{Z2}+\frac{V-}{Z3}+\frac{Vs}{Z4}}{\frac{1}{Z1}+\frac{1}{Z2}+\frac{1}{Z3}+\frac{1}{Z4}}$$

Comme l'amplificateur est supposé idéal, $V+ = V-$

$D'où \ \frac{VN}{Z3}+\frac{Vs}{Z5} = 0 \Rightarrow VN = -\frac{Z3}{Z5}Vs$

$$VN = \frac{\frac{Ve}{Z1}+\frac{Vs}{Z4}}{\frac{1}{Z1}+\frac{1}{Z2}+\frac{1}{Z3}+\frac{1}{Z4}} = -\frac{Z3}{Z5}Vs$$

En réduisant au même dénominateur commun :

$$-\frac{Z3}{Z5}Vs = \frac{\frac{Ve}{Z1}+\frac{Vs}{Z4}}{\frac{Z2Z3Z4+Z1Z3Z4+Z1Z2Z4+Z1Z2Z3}{Z1Z2Z3Z4}}$$

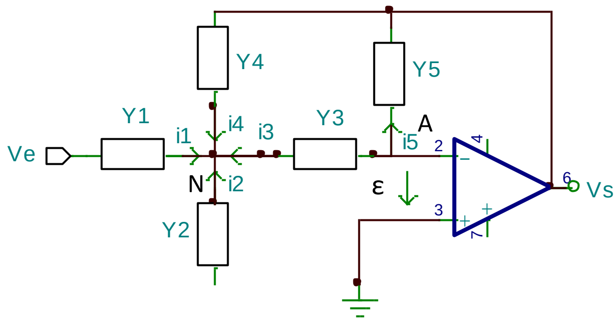
$$= -\frac{Z3}{Z5}Vs.\frac{Z2Z3Z4 + Z1Z3Z4 + Z1Z2Z4 + Z1Z2Z3}{Z1Z2Z3Z4} = \frac{Ve}{Z1} + \frac{Vs}{Z4}$$

$$-Vs(\frac{1}{Z5}\frac{Z2Z3Z4+Z1Z3Z4+Z1Z2Z4+Z1Z2Z3}{Z1Z2Z4} + \frac{1}{Z4}) = \frac{Ve}{Z1}$$

$$-Vs(\frac{Z2Z3Z4+Z1Z3Z4+Z1Z2Z4+Z1Z2Z3+Z1Z2Z5}{Z1Z2Z4Z5} = \frac{Ve}{Z1}$$

$$\frac{Vs}{Ve} = -\frac{Z2Z4Z5}{Z1Z2(Z3+Z4+Z5)+Z3Z4(Z2+Z4)}$$

Une autre méthode peut être utilisée pour le calcul de la fonction de transfert en utilisant les admittances $\boldsymbol{Yi = \frac{1}{Zi}}$ à la place des impédances et utiliser la loi des nœuds aux point N et A.



Les courants dans les différentes branches du circuit sont notés Im avec i ={1,2,3,4,5} comme le montre la figure ci-dessus. Le sens des courants est choisi arbitrairement.

En choisissant les sens des courants de la figure ci-dessus :

$$i1 = (Ve - V_N).Y1$$

$$i2 = - V_N.Y2$$

$$i3 = (V^{-} - V_N).Y3 = - V_N.Y3$$

$$i4 = (Vs - V_N).Y4$$

$$i5 = (V^{-} - V_s).Y5 = - V_s.Y5$$

La loi des nœuds au point A donne :

$$i3 + i5 = 0$$

$$- V_N.Y3 - V_s.Y5 = 0$$

$$V_N = -\frac{Y5}{Y3} Vs$$

La loi des nœuds au point N donne :

$$i1 + i2 + i3 + i4 = 0$$

$$(Ve - V_N).Y1 - V_N.Y2 - V_N.Y3 + (Vs - V_N).Y4 = 0$$

En remplaçant V_N par sa valeur et en développant on trouve le rapport :

$$\frac{Vs}{Ve} = -\frac{Y1.Y3}{Y3.Y4+Y5(Y1+Y2+Y3+Y4)}$$

3.2 Structure de Sallen et Key

La deuxième structure étudiée dans ce cours est représentée à la figure 50 :

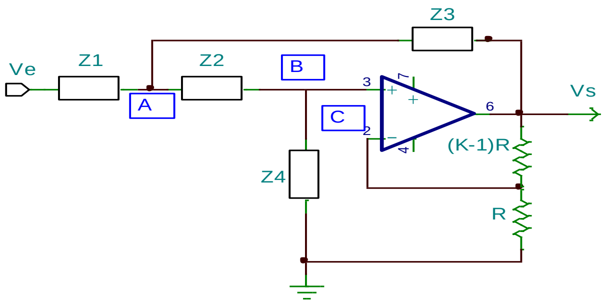


Figure 50

La méthode de calcul est la même que pour la *structure de Rauch* c.-à-d. utiliser *Millmann* pour les trois nœuds *A, B, et C*. ce qui donne :

$$V- = \frac{R}{R+(k-1).R} Vs = \frac{Vs}{k}$$

$$V+ = \frac{Z2}{Z2+Z4}.V_A \rightarrow V_A = (\frac{Z2}{Z4} + 1).V+$$

$$VA = \frac{\frac{Ve}{Z1}+\frac{V+}{Z2}+\frac{Vs}{Z3}}{\frac{1}{Z1}+\frac{1}{Z2}+\frac{1}{Z3}}$$

Comme l'amplificateur est supposé idéal, $V+ = V-$:

$$VA = \frac{\frac{Ve}{Z1}+\frac{\frac{Vs}{k}}{Z2}+\frac{Vs}{Z3}}{\frac{1}{Z1}+\frac{1}{Z2}+\frac{1}{Z3}}$$

$$(\frac{Z2}{Z4}+\ 1).V+\ = \frac{\frac{Ve}{Z1}+\frac{\frac{Vs}{k}}{Z2}+\frac{Vs}{Z3}}{\frac{1}{Z1}+\frac{1}{Z2}+\frac{1}{Z3}}$$

$$\left(\frac{1}{Z1}+\frac{1}{Z2}+\ \frac{1}{Z3}\right)(\frac{Z2}{Z4}+\ 1).\ \frac{Vs}{k} = \frac{Ve}{Z1}+\frac{\frac{Vs}{k}}{Z2}+\ \frac{Vs}{Z3}$$

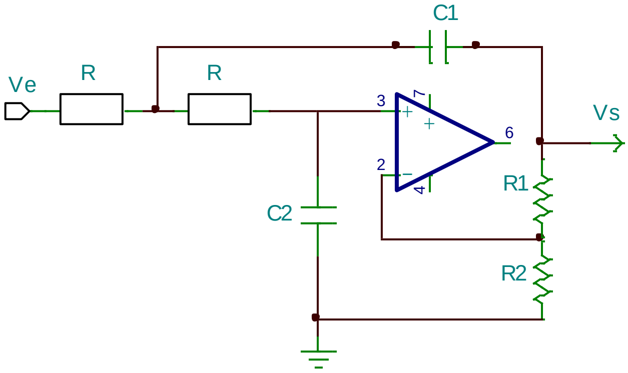
$$\frac{Vs}{k}\left(\left(\frac{1}{Z1}+\frac{1}{Z2}+\ \frac{1}{Z3}\right)\left(\frac{Z2}{Z4}+\ 1\right)-\ \frac{1}{Z2}\ -\frac{k}{Z3}\right) = \frac{Ve}{Z1}$$

$$\frac{Vs}{k}\ \left(\left(\frac{Z1Z2}{Z1Z4}+\frac{Z1Z2}{Z2Z4}+\frac{Z1Z2}{Z3Z4}+\ \frac{Z1}{Z1}+\frac{Z1}{Z2}+\frac{Z1}{Z3}-\ \frac{Z1}{Z2}-\ \ \frac{Z1k}{Z3}\right)\right) = Ve$$

$$\frac{1}{H(p)} = \ \frac{Ve}{Vs}\ = \frac{1}{k}\left\{1+(1-k)\frac{Z1}{Z3}+\frac{Z1}{Z4}+\frac{Z2}{Z4}+\ \frac{Z1Z2}{Z3Z4}\right\}$$

3.3 Filtre passe-bas de second ordre

Les filtres passe-bas de second ordre ont une fonction de transfert de la forme générale suivante :



$$\frac{Vs}{Ve} = \frac{Y1.Y3}{(Y1+Y2)(Y3+Y4)+ Y3(Y4-Y2.KA}$$

$$Avec\ KA = \frac{R1+R2}{R2}$$

$Y1 = \frac{1}{R1}$; $Y2 = jC1\omega$; $Y3 = \frac{1}{R2}$; $Y4 = jC2\omega$

$$H(j\omega) = K_A \frac{\frac{1}{R^2}}{(\frac{1}{R}+jC\omega)^2 + \frac{jC\omega}{R} - \frac{jC\omega}{R}.KA} = K_A \frac{\frac{1}{R^2}}{\frac{1}{R^2} + \frac{3jC\omega}{R} + (jC\omega^2) - \frac{jC\omega}{R}.KA} =$$

$$K_A \frac{1}{1+(3-KA)jRC\omega + (jRC\omega^2)}$$

A savoir que nous cherchons à obtenir une fonction de transfert normalisée **H** de la forme *passe-bas du second ordre* :

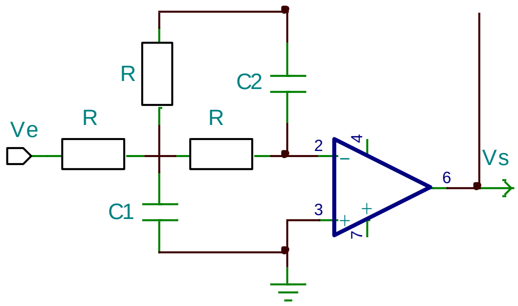
$$H(j\omega) = \frac{A}{1+2mj\frac{\omega}{\omega c} + (j(\frac{\omega}{\omega c})^2}$$

On identifie donc les éléments suivants par rapport à la forme canonique d'un filtre passe-bas :

$A = KA = \frac{R1+R2}{R2}$; $\omega c = \frac{1}{RC}$; $2m = \frac{1}{Q} = 3 - KA = 2 - \frac{R1}{R2} \Rightarrow \boldsymbol{m = 1 - \frac{R1}{2R2}}$

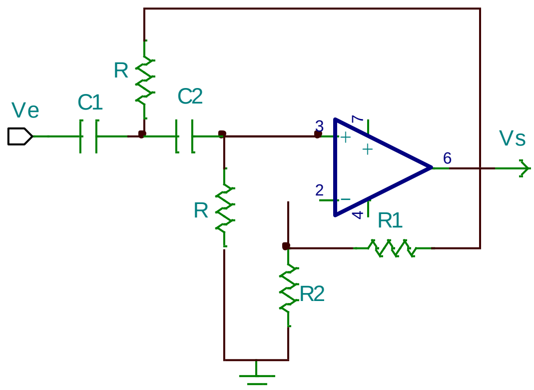
m est appelé facteur d'amortissement du filtre et ω_0 sa pulsation de coupure.

Autre Exemple :



3.4 Filtre passe-haut de second ordre

Les filtres passe-bas de second ordre ont une fonction de transfert de la forme générale suivante :



Ce type de montage est caractérisé de manière générale par l'expression suivante :

$$\frac{Vs}{Ve} = K_A \frac{Y1.Y3}{(Y1+Y2)(Y3+Y4)+Y3(Y4-Y2K_A)}$$

$$Avec\ K_A = \frac{R1+R2}{R2}$$

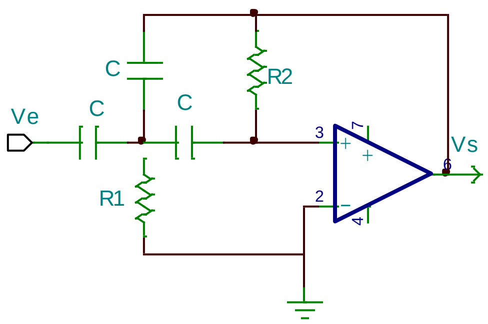
On obtient :

$$H(j\omega) = K_A \frac{(jC\omega)^2}{(\frac{1}{R}+jC\omega)^2+jC\omega(\frac{1}{R}-\frac{K_A}{R})} = K_A \frac{(jC\omega)^2}{\frac{1}{R^2}+\frac{2jC\omega}{R}+(jC\omega^2)+\frac{jC\omega}{R}+\frac{jC\omega}{R}.K_A} =$$

$$K_A \frac{(jRC\omega)^2}{1+(3-K_A)jRC\omega+(jRC\omega^2)}$$

$$A = K_A = \frac{R1+R2}{R2}\ ;\ \omega c = \frac{1}{RC}\ ;\ 2m = \frac{1}{Q} = 3 - K_A = 2 - \frac{R1}{R2} \Rightarrow \boldsymbol{m = 1 - \frac{R1}{2R2}}$$

Autre exemple :



3.5Filtre passe-bande de second ordre **:**