Université Badji Mokhtar Annaba
Faculté des sciences de l'ingénieur
Département de Génie Civil
3ème année licence Génie Civil

SERIE : THEOREME DE MENABREA

EXERCICE N° 1

Soit la poutre (figure 1).

1. Déterminer les inconnues hyperstatiques au niveau de l'appui B et C en appliquant le théorème de Ménabréa
2. Tracer les diagrammes des Moments fléchissants et des efforts tranchant

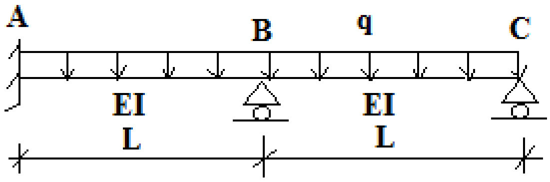


Figure 1

Résolution

Rappel de cours

L'énergie potentielle de déformation est fonction des inconnues d'appui ou réactions (réactions d'appui ou moments d'encastrement) et des charges extérieures appliqués sur la structure.

$$U_P = f(P_i, R_i, M_i)$$

Si le système est hyperstatique de degrés k soumis à n charges P_i telle que :

$$k = l + m$$

ou m désigne le nombre de réaction hyperstatique et m le nombre de moments d'encastrement hyperstatiques.

On peut alors écrire :

$$dU_P = \frac{\partial U_p}{\partial P_1}.dP_1 + \ldots \frac{\partial U_p}{\partial P_n}.dP_n + \frac{\partial U_p}{\partial R_1}.dR_1 + \cdots \frac{\partial U_p}{\partial R_l}.dP_l + \frac{\partial U_p}{\partial M_1}.dM_1 + \cdots \frac{\partial U_p}{\partial M_m}.dM_m$$

Or si les charges appliquées sont invariables les termes en dP_i sont nuls il vient alors

$$dU_P = \frac{\partial U_p}{\partial R_1}.dR_1 + \cdots \frac{\partial U_p}{\partial R_l}.dP_l + \frac{\partial U_p}{\partial M_1}.dM_1 + \cdots \frac{\partial U_p}{\partial M_m}.dM_m$$

Or aussi d'après le théorème de Castigliano, les dérivées partielles $\frac{\partial U_p}{\partial R_i}$ représentent les projections δ_i des déplacements d'appui suivant la direction de ces inconnues d'appui. Si tous les appuis sont de même niveau, tous les déplacements sont nuls et $dU_p = 0$: l'énergie potentielle de déformation passe par un extrémum qui correspond, en fait, à un minimum.

Ainsi lorsqu'un système hyperstatique satisfera la condition d'énergie potentielle minimum, c'est-à-dire lorsque les déplacements de tous les appuis surabondants seront nuls, les relations suivantes dites de Ménbréa peuvent être introduites :

$$\frac{\partial U_p}{\partial R_1} = 0, \dots \frac{\partial U_p}{\partial R_i} = 0, \dots \frac{\partial U_p}{\partial R_l} = 0$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial M_1} = 0, \dots \frac{\partial U_p}{\partial M_i}. = 0, \dots \frac{\partial U_p}{\partial M_m}. = 0$$

Ces équations fournissent un nombre d'équations égal au Ddh du système, qui associées aux équations de la statique permettent de déterminer toutes les inconnues d'appuis

EXERCICE N°1

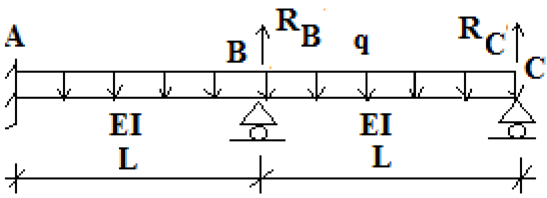
1. **Détermination des inconnues hyperstatiques au niveau de l'appui B et C en appliquant le théorème de Ménabréa**
   - **Détermination du Ddh**

H= 3K –A=3*2-4=2 fois hyperstatique

Or d'après Ménabréa les appuis surabondants B et C ne se déplacent pas verticalement donc :

$$\frac{\partial U_p}{\partial R_B} = 0 \; et \; \frac{\partial U_p}{\partial R_C} = 0$$

L'expression des moments fléchissant dans une section d'abscisse x s'écrit :



Tronçon CB : 0≤ $x \leq L$

$$M_{CB}(x) = R_C x - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow \frac{\partial M_{CB}}{\partial R_B} = 0 \;\; et \frac{\partial M_{CB}}{\partial R_C} = x$$

Tronçon BA : 0≤ $x \leq L$

$$M_{BA}(x) = R_C(x+L) - qL\left(\frac{L}{2} + x\right) - \frac{qx^2}{2} + R_B x \Rightarrow \frac{\partial M_{BA}}{\partial R_B} = x \;\; et \frac{\partial M_{BA}}{\partial R_C} = x + L$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial R_B} = 0 = \int_0^L \frac{M_{CB}(x)}{EI} \frac{\partial M_{CB}}{\partial R_B} dx + \int_0^L \frac{M_{BA}(x)}{EI} \frac{\partial M_{BA}}{\partial R_B} dx$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial R_B} = \int_0^L \left[R_C(x+L) - qL\left(\frac{L}{2} + x\right) - \frac{qx^2}{2} + R_B x\right] \; x \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{8R_B + 20R_C - 17P = 0} \qquad \textit{(1)}$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial R_C} = 0 = \int_0^L \frac{M_{CB}(x)}{EI} \frac{\partial M_{CB}}{\partial R_C} dx + \int_0^L \frac{M_{BA}(x)}{EI} \frac{\partial M_{BA}}{\partial R_C} dx$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial R_C} = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^L \left(R_C x - \frac{qx^2}{2}\right) x \, dx + \int_0^L \left(R_C(x+L) - qL\left(\frac{L}{2} + x\right) - \frac{qx^2}{2} + R_B x\right)(x+L) \, dx\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{20R_B + 64R_C - 48P = 0} \qquad \textit{(2)}$$

La résolution du système d'équations (1) et (2) donne :

$$\boldsymbol{R_B = 1,14P \ \ et \ R_C = 0,39P}$$

2. ***Diagramme des M et T***

- ***Diagramme des moments fléchissants***
- **Tronçon CB : 0≤ $\boldsymbol{x \leq L}$**
- $M_{CB}(x)$
- $= R_C x - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} M(0) = 0 \\ M(0{,}39L) = 0{,}076PL \\ M(L) = 0{,}39PL - 0{,}5PL = -0{,}11PL \end{array}\right.$

M*max*$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{dM_{CB}}{dx} = 0} \Rightarrow R_C - qx = 0{,}39P - qx = 0 \Rightarrow x = 0{,}39\,L$

T(x)= $-\frac{dM_{CB}}{dx} = -R_C + qx \Rightarrow$ *T(0)=* $R_C = -0{,}39P$ *et T(L)= + 0,61P*

Tronçon BA : 0≤ $\boldsymbol{x \leq L}$

$$M_{BA}(x) = R_C(x + L) - qL\left(\frac{L}{2} + x\right) - \frac{qx^2}{2} + R_B x$$

$$M_{BA}(x) = 0{,}39P(x + L) - P\left(\frac{L}{2} + x\right) - \frac{Px^2}{2L} + 1{,}14Px$$

$$M_{BA}(0) = -0{,}11PL$$

$$M_{BA}(L) = -0{,}08PL$$

M*max*$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{dM_{BA}}{dx} = 0 \Rightarrow 0,39P} - P - \frac{Px}{L} + 1{,}14P = 0 \Rightarrow x = 0{,}53\,L$

$$M_{BA}(0{,}53L) = 0{,}03PL$$

$\mathbf{T(x) = -0,53P} + \frac{Px}{L} \Rightarrow$ *T(0)=* $R_C = -0{,}53P$ *et T(L)= + 0,47P*

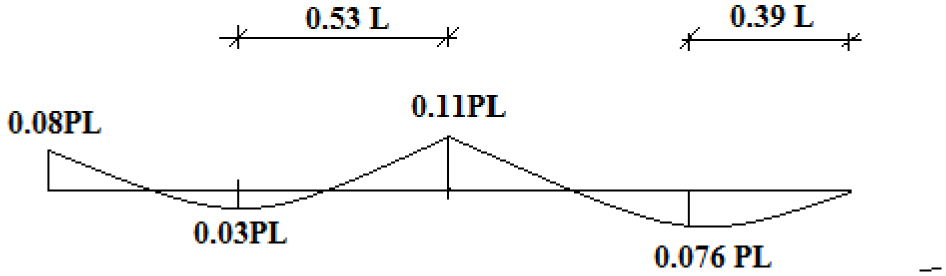


Diagramme des moments fléchissants

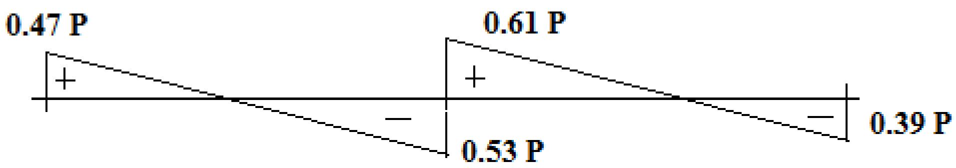


Diagramme des efforts tranchants