

Chapitre 2 : Systèmes Hyperstatiques

2.1 Définitions

2.1.1 Structures planes

Un ensemble indéformable de plusieurs barres droites ou courbes liés barres entre elles d'après certaines règles et principes s'appelle **structure**, le point de jonction de deux ou plusieurs barres est un **nœud** de la structure. Si les axes de toutes les barres se trouvent dans un même plan la structure est plane, sinon elle est spatiale.

2.1.2 Structures hyperstatiques

On dit qu'une structure est hyperstatique si on ne peut pas déterminer les forces de liaisons dans les appuis par les seules équations d'équilibre de la statique. Il en résulte que ce type de structure présente des liaisons surabondantes que les forces correspondantes ne peuvent être déterminées qu'on utilisant d'autres conditions que celles données par la statique.

2.1.3 Liaisons intérieures et liaisons extérieures

Les liaisons surabondantes peuvent être classées en deux catégories :

- **Liaisons extérieures** : on dit qu'une structure est hyperstatique extérieurement si les liaisons surabondantes se trouvent au niveau des appuis.
- **Liaisons intérieures** : on dit qu'une structure est hyperstatique intérieurement quand les liaisons surabondantes proviennent de la conception intérieure de la structure telles que les cadres ou les croix de saint André qui assurent le contreventement des structures.

2.1.4 Degré d'hyperstaticité (ou Ddh)

Le nombre de liaisons surabondantes extérieures et/ou intérieures constitue le Ddh de la structure. La détermination du Ddh est une étape incontournable pour entamer l'étude de n'importe quelle structure (isostatique ou hyperstatique).

2.1.5 Calcul du degré d'hyperstaticité

On distingue plusieurs méthodes qui permettent de déterminer le Ddh d'une structure. Certaines sont générales s'appliquant à n'importe quel type de structure et d'autres sont spécifiques à une certaine catégorie de structures.

Remarque : *Avant de passer au calcul du Ddh, il faut s'assurer que la structure en question est vraiment indéformable, c'est-à-dire qu'elle ne comporte pas de parties qui forment un mécanisme.*

Dans ce paragraphe on va présenter trois méthodes de détermination du Ddh, à savoir :

1. Méthode des contours fermés

Cette méthode est illustrée par la relation suivante :

$$H = 3K - A \quad (2.1)$$

Avec :

K : le nombre de contour fermés y compris le contour fermé de l'appui double ou fixe

Systèmes Hyperstatiques

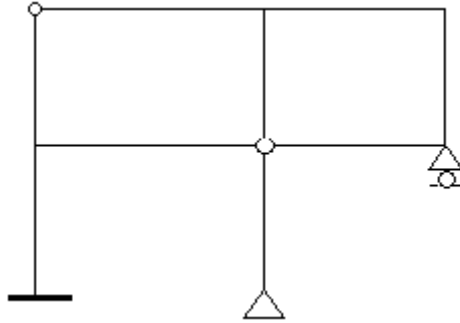
A : le nombre d'articulation y compris les articulations des appuis simples, doubles et élastiques (ressorts)

Nota : le nombre d'articulation est aussi égale au nombre de barres aboutissant à l'articulation moins 1

Soit :

$$A = b - 1 \quad (2.2)$$

Exemple 1 : Soit le portique suivant :



$K = 5$; $A = 10 \Rightarrow H = 3 \cdot 5 - 8 = 7$ fois hyperstatique

2. Méthode globale

$$H = H_{int} + H_{ext} \quad (2.3)$$

Ou :

H_{ext} (ddh extérieur) = nombre de réaction - 3

$$H_{ext} = r - 3 \quad (2.4)$$

H_{int} = ddh intérieur = Nombre de cadre * 3 - le nombre d'articulation introduite dans le cadre soit :

$$H_{int} = 3C - A_{introd} \quad (2.5)$$

$$H_{ext} = 6 - 3 = 3$$

$$H_{int} = 3 \cdot 2 - 4 \Rightarrow H = 7$$

3. Méthode des disques

La méthode des disques est une autre méthode de détermination du Ddh, plutôt applicable pour les structure en poutres isostatiques, cantilever ou continue avec ou sans articulations.

Elle s'exprime par la relation suivante :

$$H = 3D - 2A - L \quad (2.6)$$

Ou : **D** = nombre disques

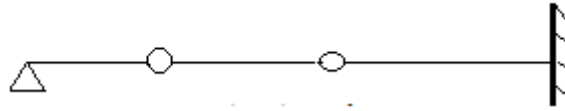
L = nombre de liaisons (nombre de réaction d'appui)

A = le nombre d'articulations

Définition d'un disque : c'est la partie rigide d'une structure comprise entre :

- ✓ Deux appuis
- ✓ Deux articulations
- ✓ Un appui et une articulation

Exemple 2



$D = \text{nombre disques} = 3$

$L = \text{nombre de liaisons nombre} = 5 \Rightarrow H = 3 \cdot 3 - (2 \cdot 5) - 2 = -3 \Rightarrow \mathbf{3 \text{ fois hyperstatique}}$

$A = \text{le nombre d'articulations} = 2$

2.2 Méthode des forces

2.2.1 Introduction

Plusieurs méthodes de calcul des structures hyperstatiques sont préconisées à savoir :

- Méthode des forces
- Méthode des déplacements
- Méthode basée sur l'analyse matricielle des structures
- Méthode des éléments finis
- Calcul assisté par ordinateur (C.A.O)

Dans ce chapitre on ne va s'intéresser qu'à la méthode des forces.

2.2.2 Principes de la méthode

Cette méthode prend en compte comme inconnues les forces de liaisons surabondantes (réaction d'appui). En supprimant les liaisons surabondantes et en les remplaçant par des forces inconnues, la structure hyperstatique est ainsi transformée en une structure isostatique pour laquelle on peut calculer les déplacements causés par les forces données (charges appliquées) et les forces de liaisons inconnues (réactions d'appui). Donc, la méthode des forces consiste à remplacer la structure hyperstatique donnée par une structure isostatique équivalente qui provient de la première en supprimant les liaisons supplémentaires.

La structure isostatique équivalente est actionnée par deux types de forces, en l'occurrence les charges appliquées sur la structure initiale et les forces de liaison inconnues en sens et en valeurs qu'il faut déterminer.

La détermination de ces forces inconnues se fait à la condition que les déformations causées par les deux types de forces sur la structure isostatique équivalente soient égales aux déformations de structure initiale hyperstatique sous le premier type de charges appliquées.

2.2.3 Système de base

La structure isostatique qui provient de la structure hyperstatique après suppression des liaisons supplémentaires sans les charges appliquées, s'appelle système de base. Les liaisons à supprimer pour rendre la structure isostatique ne sont pas imposés, ça implique que pour une même structure on peut avoir une multitude de système de base.

La poutre est une fois hyperstatique donc l'équation canonique s'écrit :

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

Avec :

$$\delta_{11} = \frac{1}{3EI} L.L.L = \frac{L^3}{3EI} \text{ et } \Delta_{1P} = \frac{1}{8EI} qL^4 \Rightarrow X_1 = \frac{3}{8} qL$$

2.2.6 Tracé des diagrammes des moments fléchissant, des efforts tranchant et des efforts normaux

Pour tracer les diagrammes des moments fléchissant, des efforts tranchant et des efforts normaux, on applique le principe de superposition des effets. Ainsi, le moment fléchissant dans une section x quelconque de la structure considérée est donné par la relation suivante :

$$M(x) = \sum_{i=1}^n m_i(x) X_i + M_P(x) \quad (2.13)$$

$m_i(x)$: Moment fléchissant dans une section x dû à une charge unitaire $X_i = 1$

$M_P(x)$: Moment fléchissant dans une section x dû au chargement réellement appliqué sur la structure équivalente.

$m_i(x) X_i$: Moment fléchissant dans une section x causé par la force de liaison inconnue X_i

De même pour l'effort tranchant et l'effort normal dans une section x quelconque on a :

$$T(x) = \sum_{i=1}^n t_i(x) X_i + T_P(x) \quad (2.14)$$

Et :

$$N(x) = \sum_{i=1}^n n_i(x) X_i + N_P(x) \quad (2.15)$$

$t_i(x)$: Effort tranchant dans une section x dû à une charge unitaire $X_i = 1$

$T_P(x)$: effort tranchant dans une section x dû au chargement réellement appliqué sur la structure équivalente.

$t_i(x) X_i$: Effort tranchant dans une section x causé par la force de liaison inconnue X_i

$n_i(x)$: Effort normal dans une section x dû à une charge unitaire $X_i = 1$

$N_P(x)$: effort normal dans une section x dû au chargement réellement appliqué sur la structure équivalente.

$n_i(x) X_i$: Effort normal dans une section x causé par la force de liaison inconnue X_i

Remarque : on peut aussi tracer ces diagrammes à partir du diagramme des moments fléchissant ou aussi par la méthode des sections, étant données que la structure est devenue isostatique, après la détermination des forces de liaison inconnues.

2.3 Utilisation de la symétrie et de l'antisymétrie des structures

2.3.1 Introduction

- La particularité d'une structure hyperstatique symétrique ou antisymétrique peut être exploitée pour simplifier les calculs, si on choisit un système de base symétrique.
- Pour les structures de base symétrique on utilise le regroupement des inconnues en symétriques et antisymétriques.
- Sachant que les coefficients sont nuls ($\delta_{ij}=0$) quand ils proviennent des produits des diagrammes symétriques avec des diagrammes antisymétriques.
- Quand les coefficients δ_{ij} sont issus de produit de diagrammes symétriques ou antisymétriques leurs valeurs peuvent être obtenues en faisant les calculs pour la moitié de la structure, puis en multipliant le résultat par deux.
- Le regroupement des inconnues en symétrique et antisymétrique est avantageux à condition que le système de force initialement donné soit décomposé en symétrique et antisymétrique.
- En pratique deux situations peuvent se présenter

a) Le système de base s'obtient en supprimant les liaisons supplémentaires, juste dans l'axe de symétrie.

- Dans ce cas les inconnues sont soit symétriques soit antisymétriques indépendamment du système de force appliqué sur la structure.
- On aura alors des équations canoniques symétriques et des équations canoniques antisymétriques.
- Quant aux termes libres de ces deux systèmes on peut toujours les décomposer en force symétriques ou antisymétriques et les associer respectivement aux inconnues symétriques et antisymétriques

Exemple :

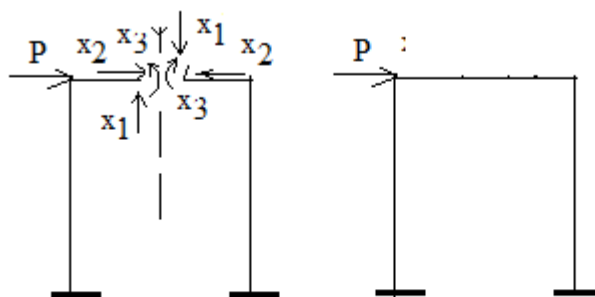


Figure 2.3: Regroupement des forces symétriques et antisymétriques

Systèmes Hyperstatiques

symétriques et que les diagrammes des efforts tranchants et des rotations sont antisymétriques.

- *Pour les structures symétriques chargées anti symétriquement les diagrammes des efforts tranchant et les diagrammes des rotations sont symétriques par contre les diagrammes des efforts normaux, des moments fléchissant et des flèches sont antisymétriques.*

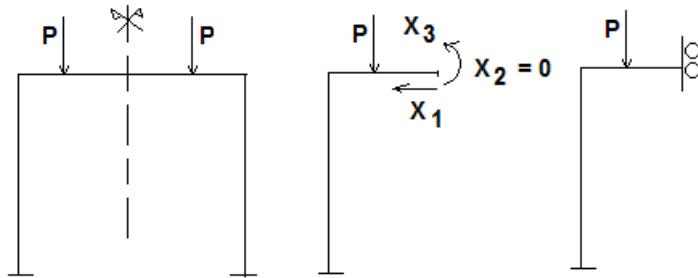


Figure 2.5 a et b : Structure symétrique à nombre de travée impair et Demi- structure

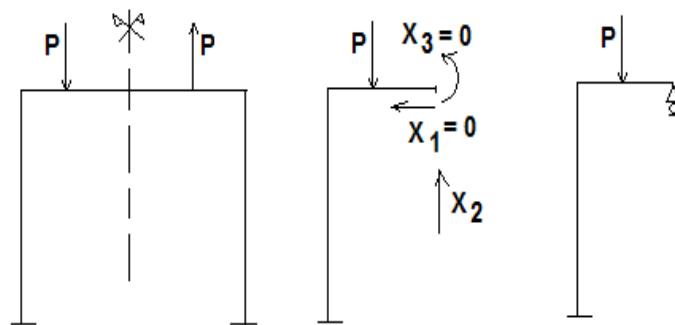


Figure 2.6 c et d: structure antisymétrique à nombre de travée impair et demi- structure

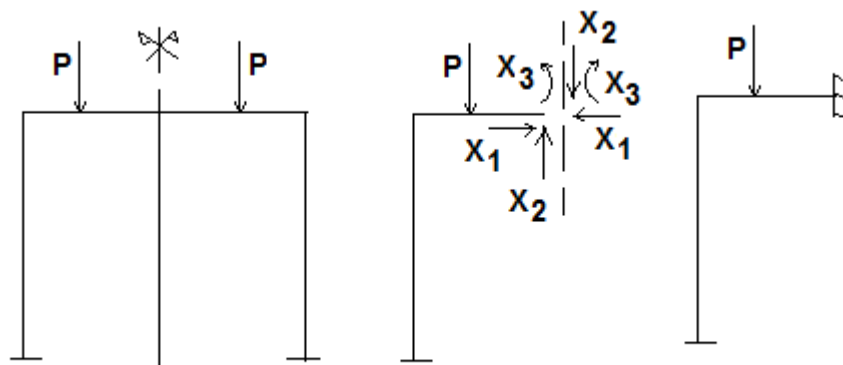


Figure 2.7 e et f : structure symétrique à nombre de travée pair et demi-structure

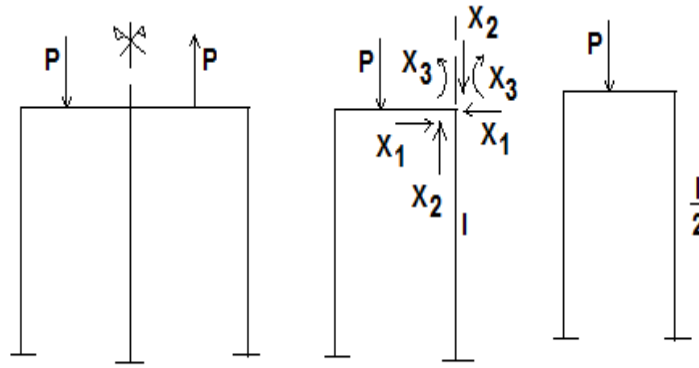


Figure 2.8 g et h: structure antisymétrique à nombre de travée pair et demi-structure

2.4 Théorème de Ménabréa

2.4.1 Introduction

Le théorème de Ménabréa permet aussi comme la méthode des forces de lever l'indétermination statique des structures hyperstatiques et par conséquent il permet de résoudre ce type de structures.

2.4.2 Principes de la méthode

L'énergie potentielle de déformation est fonction des inconnues d'appui ou réactions (réactions d'appui ou moments d'encastrement) et des charges extérieures appliquées sur la structure.

$$U_p = f(P_i, R_i, M_i) \quad (2.18)$$

Si le système est hyperstatique de degrés k soumis à n charges P_i telle que :

$$k = p + m \quad (2.19)$$

ou p désigne le nombre de réaction hyperstatique et m le nombre de moments d'encastrement hyperstatiques.

On peut alors écrire :

$$dU_p = \frac{\partial U_p}{\partial P_1} \cdot dP_1 + \dots + \frac{\partial U_p}{\partial P_n} \cdot dP_n + \frac{\partial U_p}{\partial R_1} \cdot dR_1 + \dots + \frac{\partial U_p}{\partial R_p} \cdot dR_p + \frac{\partial U_p}{\partial M_1} \cdot dM_1 + \dots + \frac{\partial U_p}{\partial M_m} \cdot dM_m \quad (2.20)$$

Or si les charges appliquées sont invariables les termes en dP_i sont nuls il vient alors

$$dU_p = \frac{\partial U_p}{\partial R_1} \cdot dR_1 + \dots + \frac{\partial U_p}{\partial R_p} \cdot dR_p + \frac{\partial U_p}{\partial M_1} \cdot dM_1 + \dots + \frac{\partial U_p}{\partial M_m} \cdot dM_m \quad (2.21)$$

Or aussi d'après le théorème de Castigliano, les dérivées partielles $\frac{\partial U_p}{\partial R_i}$ représentent les projections δ_i des déplacements d'appui suivant la direction de ces inconnues d'appui. Si tous les appuis sont de même niveau tous les déplacements sont nuls et $dU_p = 0$: l'énergie potentielle de déformation passe par un extrémum qui correspond, en fait, à un minimum.

Ainsi lorsqu'un système hyperstatique satisfera la condition d'énergie potentielle minimum, c'est-à-dire lorsque les déplacements de tous les appuis surabondants seront nuls, les relations suivantes dites de Ménbréa peuvent être introduites :

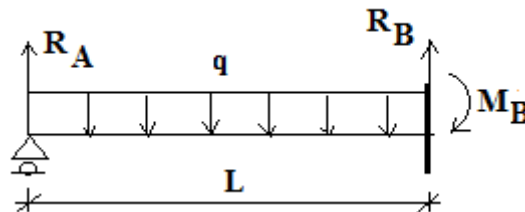
$$\frac{\partial U_p}{\partial R_1} = 0, \dots, \frac{\partial U_p}{\partial R_i} = 0, \dots, \frac{\partial U_p}{\partial R_l} = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial M_1} = 0, \dots, \frac{\partial U_p}{\partial M_i} = 0, \dots, \frac{\partial U_p}{\partial M_m} = 0 \quad (2.23)$$

Ces équations fournissent un nombre d'équations égal au Ddh du système, qui associées aux équations de la statique permettent de déterminer toutes les inconnues d'appuis.

2.4.3 Application

- Déterminer les inconnues surabondantes de la poutre suivante



L'expression du moment fléchissant dans une section d'abscisse x s'écrit :

$$M(x) = R_A x - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial R_A} = x$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial R_A} = 0 = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R_A} dx = \int_0^L \left(R_A x - \frac{qx^2}{2} \right) x dx = R_A \frac{L^3}{3} - \frac{qL^4}{8} \Rightarrow R_A = \frac{3qL}{8}$$

D'où et d'après les équations de la statique

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow R_B = \frac{5qL}{8} \text{ et } \sum M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{qL^2}{8}$$

- Diagramme des moments fléchissant et des efforts tranchants

$$M(x) = R_A x - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow M(0) = 0 \\ x = L \Rightarrow M(L) = -\frac{qL^2}{8} \end{cases}$$

$$M_{max} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \Rightarrow R_A - qx = 0 \Rightarrow x = \frac{R_A}{q} = \frac{3L}{8} \Rightarrow M\left(\frac{3L}{8}\right) = \frac{9qL^2}{128}$$

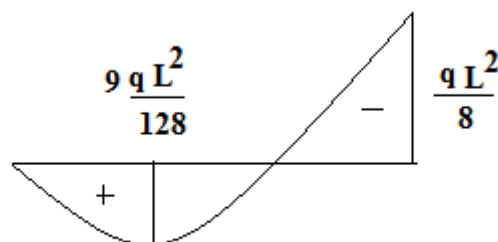


diagramme du moment fléchissant

$$T(x) = R_A - qx \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow T(0) = R_A = \frac{3qL}{8} \\ x = L \Rightarrow T(L) = -\frac{5qL}{8} \end{array} \right.$$

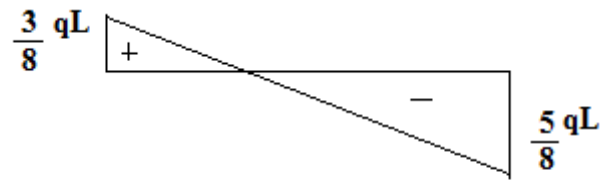


diagramme des efforts tranchants

METHODE DES FORCES