INTRODUCTION AUX FORMES DIFFERENTIELLES (SUITE)

IV- Formes exactes et formes fermées :

1- Différentielle extérieure :

Définition :

Soit une k-forme différentielle différentiable sur un ouvert U $\subset \mathbb{R}^n$:

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < .. < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

On définit alors la $(k+1)$ -forme différentielle $d\alpha$
par la formule :

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < .. < i_k \leq n} da_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

La forme différentielle $d\alpha$ est appelée différentielle extérieure de α .

2- Exemples :

a- Differentielle exterieure d'une 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$:

Soit : $\alpha = \sum_{j=1}^{n} da_j x_j$ alors $d\alpha = \sum_{j=1}^{n} da_j \wedge dx_j$

avec $da_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i$ et sachant que : $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq \leq n} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j$$

b- Differentielle extérieure d'une 1-forme sur $\mathbb{R}^3$

Soit $\alpha = adx + bdy + cdz$

par comparaison avec la formule précedente

$a = a_1 \quad dx = dx_1$, $b = a_2 \quad dy = dx_2$,$c = a_3 \quad dz = dx_3$

Alors :

$$d\alpha = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Si on considère que $u : U \to \mathbb{R}^3$ une fonction de composantes (a, b, c)

,

l'égalité précédente peut s'écrire à l'aide des composantes

$\left((rot)_x\,,(rot)_y\,,(rot)_z\right)$ du rotationnel de u défini par :

$$rotu = \nabla \wedge u = \begin{matrix} \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) \end{matrix}$$

donc $\quad d\alpha = (rot)_x\,dy \wedge dz + (rot)_y\,dz \wedge dx + (rot)_z\,dx \wedge dy$

c- Différentielle extérieure dune 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$:

Soit : $ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy$

par définition on a :

$$d\alpha = da \wedge dy \wedge dz + db \wedge dz \wedge dx + dc \wedge dx \wedge dy$$

après calcul , on obtient :

$$d\alpha = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge \sigma dz$$

en posant $u =^T (a, b, c)$, on sait que : $\operatorname{div} u = \bigtriangledown .u = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}$

alors $\quad d\alpha = \operatorname{div} u\ dx \wedge dy \wedge dz$

3- Définition :

On dit qu'une k-forme différentielle est fermée si elle est différentiable

et vérifie $d\alpha = 0$.

Exemples :
- La 1-forme différentielle $\quad \alpha = adx + bdy + cdz$

est fermée si et seulement les coefficients a, b, c vérifient :

$\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$

donc : $rotu = 0$

-La 2-forme différentielle $\quad \alpha = ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy$

est fermée si et seulement les coefficients a, b, c vérifient :

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{div} u = 0$$

4- Définition :

On dit qu'une (k+1) forme α est exacte s'il existe une forme k

différentielle ω telle que : $\alpha = d\omega$.

Exemple:

La 1-forme différentielle : $\alpha = adx + bdy + cdz$

est exacte ssi $\exists$ une fonction differentiable $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$a = \frac{\partial f}{\partial x}$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}$, $c\frac{\partial f}{\partial z}$

Autrement dit :

Une 1-forme α est exacte ssi elle peut s'écrire comme

la différentielle d'une fonction f de $U \rightarrow \mathbb{R}$

C.A.D : $\alpha = adx + bdy + cdz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$

Pour la 2-forme differentielle : $\alpha = adx \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy$

est exacte ssi $\exists$ trois fonctions f ,g ,h de $U \rightarrow \mathbb{R}$

différentiables telle que

$a = \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}$ $\qquad b = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}$ $\qquad c = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$

cad : si onpose $u =^T (a, b, c)$ cela revient à dire qu'il existe

une fonction différentiable $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $u = rotv$

Théorème :

Soit ω une k- forme différentielle à coefficients C^2 .

Alors $d(d\omega) = 0$.

Preuve :

soit : $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < .. < i_k \leq n} \omega_{i_1 ... i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$

une k-forme différentielle

donc

$d(d\omega) = \sum_{1 \leq i_1 < .. < i_k \leq n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 ... i_k}}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \wedge dx_j \wedge ... \wedge dx_{i_k}$

d'apres théorème de Schwarz $\frac{\partial^2 \omega_{i_1 ..., i_k}}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 \omega_{i_1 ..., i_k}}{\partial x_i \partial x_j}$

et $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ dire

les termes de la double somme en i et j se compense 2à2 donc $d(d\omega) = 0$

corollaire :

Toute forme differentielle exacte à coefficients C^1 est fermée .

Preuve : α est exacte $\Longrightarrow \exists\ \omega$ telle $\alpha = d\omega$

d'apres le théorème précedent $d\alpha = d(d\omega) = 0$

Exemple : Soit α la 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$\alpha(x,y) = \left(2x \cos y - y^2 \sin x\right) dx + \left(2y \cos x - x^2 \sin y\right) dy$

$\alpha(x,y) = a_1(x,y)\, dx + a_2(x,y)\, dy$

$d\alpha(x,y) = da_1(x,y) \wedge dx + da_2(x,y) \wedge dy$

$d\alpha(x,y) = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy$

$d\alpha(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial a_2}{\partial x} = \frac{\partial a_1}{\partial y}$

ici : $a_1(x,y) = 2x \cos y - y^2 inx$, $a_2(x,y) = 2y \cos x - x^2 \sin y$

$\frac{\partial a_2}{\partial x} = -2y \sin x - 2x \sin y \quad = \quad \frac{\partial a_1}{\partial y} = -2x \sin y - 2y \sin x$

$d\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha$ est exacte

Définition : Soit U un ouvert . U est étoilé par rapport au point a si $\forall x \in U \quad , \quad [a,x] \subset U$

Conséquence :

Tout ouvert convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points

Lemme de Poincaré :

Soit U un ouvert convexe .Soit α une k-forme différentielle fermée

et de classe C^1 sur U .Alors α est exacte .

Donc , dans l'exemple précédent $d\alpha = 0$, d'après Poincaré ,

il doit donc existé une 0-forme (c'est-à-dire une fonction)telle que $\alpha = df$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy =$$

$$\alpha(x,y) = \left(2x\cos y - y^2 \sin x\right)dx + \left(2y\cos x - x^2\sin y\right)dy$$

alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx = \left(2x\cos y - y^2\sin x\right) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(2y\cos x - x^2\sin y\right)$$

$$f(x,y) = y^2\cos x + x^2\cos y + \varphi(x) \quad \text{avec } \varphi(x) = c$$

donc toute s les fonctions

$$f(x,y) = y^2\cos x + x^2\cos y + c \quad \text{avec } c \text{ réel quelconque conviennent}$$

Corollaire :

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^3$ et de $u : U \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 .

Alors il existe une fonctiion

$f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $u = \nabla f$ ssi $rotu = 0$.

Preuve :

a- Dans le sens direct ,si $u = \nabla f$ alors $rotu = rot(\nabla f) = \nabla \wedge \nabla f = 0$

b-dans l'autre sens ,si a,b ,c sont les composantes de u et

$\alpha = adx + bdy + cdz$ .Sachant que $rotu = 0$ voir plus haut $d\alpha = 0$

par Poincaré , il existe une fonction f de classe C^2 telle que $\alpha = df$ donc

$u = \nabla f$.