Correction TD 2

L'EXO 1 a été fait en salle.

EXO 2 : (schéma de Crank-Nicolson)

$$\begin{cases} u_0 = y_0 \\ u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}\left(f_i + f_{i+1}\right) \end{cases}$$

- Ce schéma est implicite car dans le second membre f_{i+1} dépend de u_{i+1}.

- Ecrivons le polynôme caractéristique du schéma :

$\pi(r) = r^2 - 1$ qui admet les 2 racines simples $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. De plus

$\pi'(1) = 2 \neq 0$ $\quad \pi'(-1) = -2 \neq 0$

donc le schéma à 2 pas est stable (zéro-stable).

- Ecrivons l'erreur de consistance R_i en x_i :

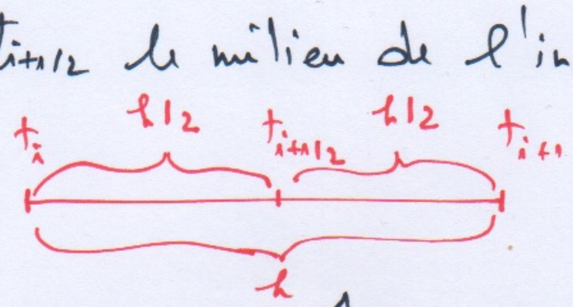
$$h R_i(h) = y(x_{i+1}) - y(x_i) - \frac{h}{2}\left(f(t_i, y(x_i)) + f(t_{i+1}, y(x_{i+1}))\right)$$

d'où
$$R_i = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \frac{1}{2}\left\{ f(t_i, y(x_i)) + f(t_{i+1}, y(x_{i+1})) \right\}$$

(*)

où $y(x)$ est la solution exacte.

- Notons par $t_{i+1/2}$ le milieu de l'intervalle (t_i, t_{i+1})



Ecrivons les d.l à l'ordre 3 :

$$y_i = y(t_i) = y(t_{i+1/2}) - \frac{h}{2} y'(t_{i+1/2}) + \frac{h^2}{8} y''(t_{i+1/2}) + o(h^3)$$

$$y_{i+1} = y(t_{i+1}) = y(t_{i+1/2}) + \frac{h}{2} y'(t_{i+1/2}) + \frac{h^2}{8} y''(t_{i+1/2}) + o(h^3)$$

En remplaçant les 2 expressions précédentes dans (*) on obtient :

$$R_i = y'(t_{i+1/2}) - \frac{1}{2} \left\{ f(t_i, y(x_i)) + f(t_{i+1}, y(x_{i+1})) \right\} + o(h^2)$$

or $\quad y'(t_i) = f(t_i, y(x_i))$ et $\quad y'(t_{i+1}) = f(t_{i+1}, y(x_{i+1}))$

donc

$$R_i = y'(t_{i+1/2}) - \frac{1}{2} \left\{ y'(t_i) + y'(t_{i+1}) \right\} + o(h^2) \quad (**)$$

Ecrivons une dernière fois les d.l de $y'(t_i)$ et $y'(t_{i+1})$ par rapport à $y(t_{i+1/2})$ à l'ordre 2 :

$$y'(t_i) = y'(t_{i+1/2}) - \frac{h}{2} y''(t_{i+1/2}) + o(h^2)$$

$$y'(t_{i+1}) = y'(t_{i+1/2}) + \frac{h}{2} y''(t_{i+1/2}) + o(h^2)$$

d'où en remplaçant dans (**)

$$R_i = o(h^2)$$

Ce qui veut dire que le schéma est consistant d'ordre 2. Comme il est zéro-stable d'après le Théorème de Lax-Richtmyer il est convergeant d'ordre 2.

- Posons $\boxed{K_1 = f(t_i, u_i)}$ et $K_2 = f(t_{i+1}, u_{i+1})$

donc

$$\boxed{u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)}$$

d'où $K_2 = f(t_{i+1}, u_{i+1}) = \boxed{f\left(t_i + h, u_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)\right)}$.

Le schéma de Crank-Nicolson est donc une méthode de R.K implicite dont le tableau de Butcher est :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Exo3

- Posons $z_1 = x$ et $z_2 = x'$

donc $z_1' = x' = z_2$

et $z_2' = x'' = x = z_1$.

Le système est :

$$(1) \quad \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_1 \\ z_1(0) = 0 \\ z_2(0) = 2 \end{cases}$$

- l'équation $x'' - x = 0$ est du second ordre à coefficients constants. le Polynôme caractéristique est :

$$r^2 - 1 = 0.$$ d'où les 2 solutions

$$r_1 = 1 \text{ et } r_2 = -1.$$

la solution générale est donc

$$x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$$ (voir cours EDO).

$$x(0) = 0 \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 2 \end{cases}$$
$$x'(0) = 2 \Leftrightarrow$$

d'où $c_1 = 1$ et $c_2 = -1$.

la solution exacte est donc

$$\boxed{x(t) = e^{t} - e^{-t}.}$$

- $n = 4$ les noeuds sont : $\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$, $(h = \frac{1}{4})$

le schéma de R.K explicite à 2 étapes s'écrit dans le cas du système (1) $(h = \frac{1}{4})$

$$\begin{cases} u_{0,1} = 0 \\ u_{0,2} = 2 \\ K_{1,1} = u_{i,2} \\ K_{1,2} = u_{i,1} \\ K_{2,1} = u_{i,2} + \frac{1}{4} K_{1,2} \\ K_{2,2} = u_{i,1} + \frac{1}{4} K_{1,1} \\ u_{i+1,1} = u_{i,1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} K_{1,1} + \frac{1}{2} K_{2,1}\right) \\ u_{i+1,2} = u_{i,2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} K_{1,2} + \frac{1}{2} K_{2,2}\right) \end{cases}$$

d'ou le tableau

t_i	$u_{i,1}$	$u_{i,2}$	$K_{1,1}$	$K_{1,2}$	$K_{2,1}$	$K_{2,2}$
0	0	2	2	0	2	0.5
0.25	0.5	2.0625	2.0625	0.5	2.1875	1.0156
0.5	1.0312	2.2519	2.2519	1.0312	2.5097	1.5942
0.75	1.6264	2.5801	2.5801	1.6264	2.9867	2.2714
1	$\boxed{2.3222}$	—	—	—	—	—

donc $x(1) \simeq 2.3222$

l'erreur est : $er = |2.3222 - x(1)|$

$$= |2.3222 - e^{1} + e^{-1}| = \boxed{0.0282}$$

Exo 4 On considère le Pb de Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

On considère une grille uniforme $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ de Pas $h = t_{i+1} - t_i > 0$.

On a en t_i (le noeud t_i)

$$y'(t_i) = f(t_i, y_i)$$

d'après la formule de différence finies centrées Vue en cours :

$$y'(t_i) \simeq \frac{y(t_{i+1}) - y(t_{i-1})}{2h}$$

d'ou le schéma

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = f_i \longrightarrow (1)$$

avec $f_i = f(t_i, u_i)$ et u_i dénote une valeur approchée de $y_i = y(t_i)$. On peut ré-écrire le schéma (1) sous la forme :

$$u_{i+1} = u_{i-1} + 2h f_i$$

qui est un schéma à 2 pas linéaire.

Son polynôme caractéristique est :

$\pi(r) = r^2 - 1$ qui admet les 2 racines $r_1 = 1$, $r_2 = -1$. De plus

$$\pi'(1) = 2 \neq 0, \quad \pi'(-1) = -2 \neq 0.$$

Le schéma est donc zéro-stable.

Etudions la consistance de ce schéma.

L'erreur de consistance s'écrit :

$$h R_i = y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}) - 2h f(t_i, y_i)$$

ou bien

$$R_i = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_{i-1})}{h} - 2 f(t_i, y_i) \longrightarrow (2)$$

Ecrivons les d.l de y_{i+1} et y_{i-1} en fonction de y_i à l'ordre 2 :

$$y_{i+1} = y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\, y'(t_i) + o(h^2)$$
$$= y_i + h f(t_i, y_i) + o(h^2) \rightarrow (3)$$

$$y_{i-1} = y(t_{i-1}) = y(t_i) - h\, y'(t_i) + o(h^2)$$
$$= y_i - h f(t_i, y_i) + o(h^2) \rightarrow (4)$$

en reportant (3) et (4) dans (2) on obtient :

$$R_i = 2 f(t_i, y_i) - 2 f(t_i, y_i) + o(h^2)$$
$$= o(h^2)$$

le schéma est donc consistant d'ordre 2.

D'après le Théorème de Lax-Richtmyer il est convergent d'ordre 2.

Exo 4