Solution de la Série3: Processus VAR

EX1:
Soit le processus bivarié suivant

$$\begin{pmatrix} Y_{1,t} \\ Y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}.$$

1) Ce processus est-il stationnaire? (Donner la forme compacte).
On pose $Y_t = \begin{pmatrix} Y_{1,t} \\ Y_{2,t} \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$, alors la forme compacte est

$$\left(I - \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} L \right) Y_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

Pour la stationnarité, on cherche les solutions de

$$\left| I - \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} z \right| = 0 \Longleftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 1-0.7z & -0.4z \\ -0.2z & 1-0.3z \end{pmatrix} \right| = 0$$

On obtient $0.21z^2 - z + 1 = 0 \Longrightarrow \Delta = 0.16$ d'où $z_1 = 1.428\,6 > 1$ et $z_2 = 3.333\,3 > 1$, donc le processus est stationnaire.
2) Calcul de l'espérance:

$$E(Y_t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} E(Y_{t-1}),$$

Vu que le processus est stationnaire (même techniques du cas univarié)

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= \begin{pmatrix} 0.3 & -0.4 \\ -0.2 & 0.7 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3) Donner la forme $VMA(\infty)$. Calculer les 4 premiers coefficients.
A partir de la forme compacte on a:

$$\begin{aligned} Y_t &= \left(I - \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(I - \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} L \right)^{-1} \varepsilon_t \\ &= \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}^i \varepsilon_{t-i}. \end{aligned}$$

Maintenant nous allons spécifier les 4 premiers coefficients

$$Y_t = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} + \varepsilon_t + \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \varepsilon_{t-1} + \begin{pmatrix} 0.57 & 0.4 \\ 0.2 & 0.17 \end{pmatrix} \varepsilon_{t-2} + \begin{pmatrix} 0.479 & 0.348 \\ 0.174 & 0.131 \end{pmatrix} \varepsilon_{t-3} + \cdots$$

EX2:

I) Soit

$$X_t = \varepsilon_t,\ Y_t = \varepsilon_{t-1} + \eta_t \text{ et } Z_t = \eta_{t-1},$$

où ε_t et η_t sont des BB indépendants. Nous allons montrer que la relation de causalité n'est pas transitive.

*Montrons que X_t cause Y_t:

$$E\left(Y_t/\underline{Y}_{t-1}\right) = 0 \text{ et } E\left(Y_t/\underline{Y}_{t-1}, \underline{X}_{t-1}\right) = \varepsilon_{t-1}$$

alors $E\left(Y_t/\underline{Y}_{t-1}\right) \neq E\left(Y_t/\underline{Y}_{t-1}, \underline{X}_{t-1}\right)$ d'où le résultat.

*Montrons que Y_t cause Z_t:

$$E\left(Z_t/\underline{Z}_{t-1}\right) = 0 \text{ et } E\left(Z_t/\underline{Z}_{t-1}, \underline{Y}_{t-1}\right) = \eta_{t-1}$$

d'où le résultat.

*Montrons que X_t ne cause pas Z_t:

$$E\left(Z_t/\underline{Z}_{t-1}\right) = 0 \text{ et } E\left(Z_t/\underline{Z}_{t-1}, \underline{X}_{t-1}\right) = 0$$

$E\left(Z_t/\underline{Z}_{t-1}\right) = E\left(Z_t/\underline{Z}_{t-1}, \underline{X}_{t-1}\right)$ c.q.f.d. Donc la relation de causalité n'est pas transitive.

II) Je vous propose de faire cette question exactement de la même manière que **I**.

EX3:

Soit le $VAR(1)$ suivant

$$Y_t = \begin{pmatrix} Y_{1,t} \\ Y_{2,t} \\ Y_{3,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \\ Y_{3,t-1} \end{pmatrix} + \varepsilon_t.$$

avec $\varepsilon_t \sim BB(0, \Sigma)$ où $\Sigma = \begin{pmatrix} 2.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.74 \end{pmatrix}$.

1) Pour vérifier la stationnarité, on commence par la forme compacte (rappelez-vous le 1er semestre)

$$\left(I - \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} L\right) Y_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

Cherchons les solutions

$$\left| I - \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} z \right| = 0 \Longleftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 1-0.5z & 0 & 0 \\ -0.1z & 1-0.1z & -0.3z \\ 0 & -0.2z & 1-0.3z \end{pmatrix} \right| = 0$$

$\Longrightarrow (1-0.5z)\left(1-0.4z-0.03z^2\right) = 0 \Longrightarrow z_1 = 2, z_2 = 2.1525, z_3 = -15.486.$ Donc le processus est stationnaire.

2) La forme $VMA(\infty)$:

$$\begin{aligned}
Y_t &= \left(I - \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(I - \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} L\right)^{-1} \varepsilon_t \\
&= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.9 & -0.3 \\ 0 & -0.2 & 0.7 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}^i \varepsilon_{t-i} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 2.98 \\ 2.28 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}^i \varepsilon_{t-i}.
\end{aligned}$$

3) *Prévision à l'horizon 1:

$$\widehat{Y}_t(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} Y_t$$

Sachant que $Y_t = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, on obtient $\widehat{Y}_t(1) = \begin{pmatrix} -3.0 \\ 3.2 \\ 3.1 \end{pmatrix}$.

L'erreur prévisionnelle est: $Y_{t+1} - \widehat{Y}_t(1) = \varepsilon_{t+1}$ d'où l'EMQ est

$$E\left(\left(Y_{t+1} - \widehat{Y}_t(1)\right)\left(Y_{t+1} - \widehat{Y}_t(1)\right)'\right) = \Sigma,$$

d'où les IC à 95% suivants:

*

$$\begin{aligned}
IC(Y_{1,t+1}) &= \left[\widehat{Y}_{1,t}(1) \pm 1.96\sqrt{\sigma_{11}^2}\right] \\
&= \left[-3 \pm 1.96 \times \sqrt{2.25}\right] \\
&= [-5.94; -0.06].
\end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned}
IC(Y_{2,t+1}) &= \left[\widehat{Y}_{2,t}(1) \pm 1.96\sqrt{\sigma_{22}^2}\right] \\
&= \left[3.2 \pm 1.96 \times \sqrt{1}\right] \\
&= [1.24; 5.16].
\end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned}
IC(Y_{3,t+1}) &= \left[\widehat{Y}_{3,t}(1) \pm 1.96\sqrt{\sigma_{33}^2}\right] \\
&= \left[3.1 - 1.96 \times \sqrt{0.74}\right] \\
&= [1.4139; 4.7861].
\end{aligned}$$

Je vous invite à faire le même travail pour $h = 2$.
4) On pose $X_t = \begin{pmatrix} Y_{2,t} \\ Y_{3,t} \end{pmatrix}$ et $Z_t = Y_{1,t}$, donc

$$Y_t = \begin{pmatrix} Z_t \\ X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{t-1} \\ X_{t-1} \end{pmatrix} + \varepsilon_t$$

où $\delta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A_{22} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$.
X_t ne cause pas Z_t car $A_{12} = 0$; Z_t cause X_t car $A_{21} \neq 0$. (Voir le cours pour plus de détails).

<u>EX4:</u>

Soit le processus

$$\begin{cases} Y_{1,t} = 1 + 0.5Y_{1,t-1} + 0.1Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1,t} \\ Y_{2,t} = 4 + 0.4Y_{1,t-1} + 0.5Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t} \end{cases}$$

où $E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \begin{pmatrix} 0.09 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{pmatrix}$.
1) Stationnarité:

$$\begin{aligned}
\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5z & 0.1z \\ 0.4z & 0.5z \end{pmatrix} \right| &= 0 \Longleftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 1-0.5z & -0.1z \\ -0.4z & 1-0.5z \end{pmatrix} \right| = 0 \\
&\Longrightarrow (1-0.5z)^2 - 0.04z^2 = 0 \\
&\Longrightarrow (1-0.5z-0.2z)(1-0.5z+0.2z) = 0 \\
&\Longrightarrow z = \frac{10}{7} > 1 \text{ ou } z = \frac{10}{3} > 1
\end{aligned}$$

Le processus est stationnaire.
2) Prévision en fonction de Y_t et l'erreur prévisionnelle à l'horizon h.
pour $h = 1$,

$$\begin{aligned}
\widehat{Y}_t(1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} Y_t \\
Y_{t+1} - \widehat{Y}_t(1) &= \varepsilon_{t+1}
\end{aligned}$$

pour $h = 2$,

$$\begin{aligned}
\widehat{Y}_t(2) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \widehat{Y}_t(1) \\
&= \left(I + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}^2 Y_t \\
Y_{t+2} - \widehat{Y}_t(2) &= \varepsilon_{t+2} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \varepsilon_{t+1}
\end{aligned}$$

A l'horizon $h \geq 2$ on a

$$\widehat{Y}_t(h) = \left(I + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}^{h-1} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}^h Y_t$$

et

$$Y_{t+h}-\widehat{Y}_t(h)=\varepsilon_{t+h}+\begin{pmatrix}0.5 & 0.1\\ 0.4 & 0.5\end{pmatrix}\varepsilon_{t+h-1}+\cdots+\begin{pmatrix}0.5 & 0.1\\ 0.4 & 0.5\end{pmatrix}^{h-1}\varepsilon_{t+1}$$

3) Décomposition de la variance pour $Y_{1,t}$,pour $h=1,...,4$.
D'après la question précédente on a les résultats suivants, pour $h=1$:

$$E\left(Y_{1,t+1}-E\left(Y_{1,t+1}/I_t\right)\right)^2=E\left(\varepsilon_{1,t+1}\right)^2=0.09$$

d'où la contribution due à $\varepsilon_{1,t}$ est $\omega_{11}^{(1)}=\frac{0.09}{0.09}=100\%$ et la contribution due à $\varepsilon_{2,t}$ est $\omega_{12}^{(1)}=\frac{0}{0.09}=0\%$.
Pour $h=2$:

$$E\left(Y_{1,t+2}-E\left(Y_{1,t+2}/I_t\right)\right)^2=E\left(\varepsilon_{1,t+2}+0.5\varepsilon_{1,t+1}+0.1\varepsilon_{2,t+1}\right)^2=0.112\,9$$

d'où la contribution due à $\varepsilon_{1,t}$ est $\omega_{11}^{(2)}=\dfrac{0.09\times(1+0.25)}{0.112\,9}=99.6\,46\%$ et la contribution due à $\varepsilon_{2,t}$ est $\omega_{12}^{(2)}=\dfrac{0.01\times 0.04}{0.112\,9}=0.354\%$.
Pour $h=3$:

$$E\left(Y_{1,t+3}-E\left(Y_{1,t+3}/I_t\right)\right)^2=E\left(\varepsilon_{1,t+3}+0.5\varepsilon_{1,t+2}+0.1\varepsilon_{2,t+2}+0.29\varepsilon_{1,t+1}+0.1\varepsilon_{2,t+1}\right)^2=0.120\,87$$

d'où la contribution due à $\varepsilon_{1,t}$ est $\omega_{11}^{(3)}=\dfrac{0.09\times(1+0.25+0.29^2)}{0.120\,87}=99.3\,37\%$ et la contribution due à $\varepsilon_{2,t}$ est $\omega_{12}^{(3)}=\dfrac{(0.01+0.01)\times 0.04}{0.120\,87}=0.6\,618\,7\%$.
A vous maintenant de faire les calculs pour $h=4$ c'est un peu long mais très facile!
Remarque: Pour cette dernière question nous avons fait les calculs directement parce que les innovations sont orthogonales (Σ est diagonale).
<u>EX5:</u>
Soit le processus

$$\begin{cases} Y_{1,t}=7+1.2Y_{1,t-1}-0.5Y_{2,t-1}+\varepsilon_{1,t}\\ Y_{2,t}=2+0.6Y_{1,t-1}+0.3Y_{2,t-1}+\varepsilon_{2,t}\end{cases}$$

où $E\left(\varepsilon_t\varepsilon_t'\right)=\begin{pmatrix}1 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{pmatrix}$.
1) Je vous laisse le soin de faire cette question.
2) La forme $VMA(\infty)$. Prendre les 4 premiers coefficients.

$$\begin{aligned} Y_t &= \left(I-\begin{pmatrix}1.2 & -0.5\\ 0.6 & 0.3\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}7\\ 2\end{pmatrix}+\left(I-\begin{pmatrix}1.2 & -0.5\\ 0.6 & 0.3\end{pmatrix}L\right)^{-1}\varepsilon_t\\ &= \begin{pmatrix}-0.4\\ -2.8\end{pmatrix}+\sum_{i=0}^{\infty}\begin{pmatrix}1.2 & -0.5\\ 0.6 & 0.3\end{pmatrix}^i\varepsilon_{t-i}\\ &= \begin{pmatrix}-0.4\\ -2.8\end{pmatrix}+\varepsilon_t+\begin{pmatrix}1.2 & -0.5\\ 0.6 & 0.3\end{pmatrix}\varepsilon_{t-1}+\begin{pmatrix}1.2 & -0.5\\ 0.6 & 0.3\end{pmatrix}^2\varepsilon_{t-2}\\ &\quad +\begin{pmatrix}1.2 & -0.5\\ 0.6 & 0.3\end{pmatrix}^3\varepsilon_{t-3}+\cdots\end{aligned}$$

d'où:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \begin{pmatrix} -0.4 \\ -2.8 \end{pmatrix} + \varepsilon_t + \begin{pmatrix} 1.2 & -0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix} \varepsilon_{t-1} + \begin{pmatrix} 1.14 & -0.75 \\ 0.9 & -0.21 \end{pmatrix} \varepsilon_{t-2} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0.918 & -0.795 \\ 0.954 & -0.513 \end{pmatrix} \varepsilon_{t-3} + \cdots
\end{aligned}
$$

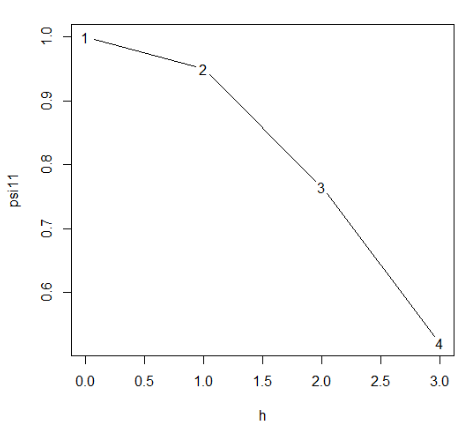
3) Faire le graphe de l'ARI pour $Y_{1,t}$ et $Y_{2,t}$.
Pour répondre à cette question normalement on doit utiliser la forme VMA précédente mais on doit remarquer que Σ n'est pas diagonale, alors on commence par orthogonaliser les innovations avec la méthode de cholesky:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P_1^2 & P_1 P_2 \\ P_1 P_2 & P_2^2 + P_3^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

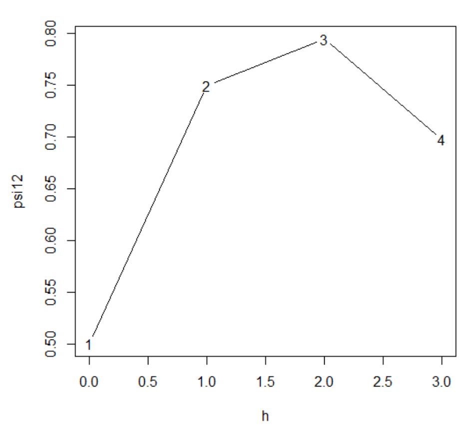
d'où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.866 \end{pmatrix}$, alors on réécrit la forme VMA structurelle

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \begin{pmatrix} -0.4 \\ -2.8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.866 \end{pmatrix} u_t + \begin{pmatrix} 1.2 & -0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.866 \end{pmatrix} u_{t-1} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1.14 & -0.75 \\ 0.9 & -0.21 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.866 \end{pmatrix} u_{t-2} + \begin{pmatrix} 0.918 & -0.795 \\ 0.954 & -0.513 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.866 \end{pmatrix} u_{t-3} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} -0.4 \\ -2.8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.866 \end{pmatrix} u_t + \begin{pmatrix} 0.95 & -0.433 \\ 0.75 & 0.2598 \end{pmatrix} u_{t-1} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0.765 & -0.6495 \\ 0.795 & -0.18186 \end{pmatrix} u_{t-2} + \begin{pmatrix} 0.5205 & -0.68847 \\ 0.6975 & -0.44426 \end{pmatrix} u_{t-3} + \cdots
\end{aligned}
$$

le graphe de l'ARI pour $Y_{1,t}$ (c'est la première colonne des coefficients):

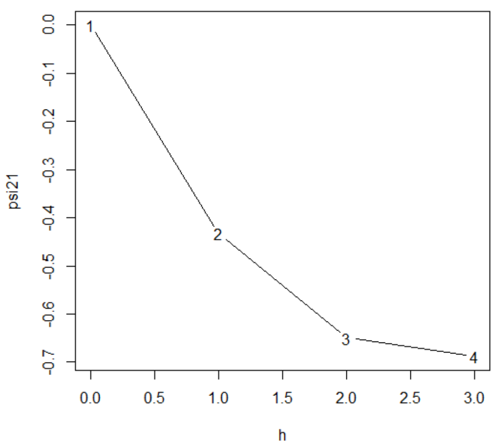


Effet d'un choc de $Y_{1,t}$ sur $Y_{1,t}$

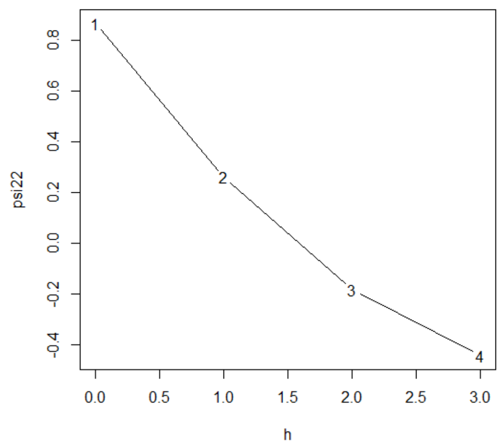


Effet d'un choc de $Y_{2,t} \rightarrow Y_{1,t}$

le graphe de l'ARI pour $Y_{2,t}$ (c'est la deuxième colonne des coefficients):



$Y_{1,t} \longrightarrow Y_{2,t}$



$Y_{2,t} \longrightarrow Y_{2,t}$

4) La prévision et l'erreur prévisionnelle, $\forall h$.
pour $h = 1$,

$$\begin{aligned}\widehat{Y}_t(1) &= \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2 & -0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix} Y_t \\ Y_{t+1} - \widehat{Y}_t(1) &= \varepsilon_{t+1}\end{aligned}$$

pour $h = 2$,

$$\begin{aligned}\widehat{Y}_t(2) &= \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2 & -0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix} \widehat{Y}_t(1) \\ Y_{t+2} - \widehat{Y}_t(2) &= \varepsilon_{t+2} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \varepsilon_{t+1}\end{aligned}$$

pour $h \geq 2$

$$\widehat{Y}_t(h) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2 & -0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix} \widehat{Y}_t(h-1)$$

et

$$Y_{t+h} - \widehat{Y}_t(h) = \varepsilon_{t+h} + \begin{pmatrix} 1.2 & -0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix} \varepsilon_{t+h-1} + \cdots + \begin{pmatrix} 1.2 & -0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}^{h-1} \varepsilon_{t+1}$$

5) Décomposition de la variance de l'erreur prévisionnelle pour $Y_{1,t}$: On utilise la forme VMA Structurelle: pour $h = 1$:

$$E\left(\left(Y_{t+1} - \widehat{Y}_t(1)\right)\left(Y_{t+1} - \widehat{Y}_t(1)\right)'\right) = \Sigma$$

d'où

$$E\left(Y_{1,t+1} - E\left(Y_{1,t+1}/I_t\right)\right)^2 = E\left(u_{1,t+1}\right)^2 = 1$$

d'où la contribution due à $u_{1,t}$ est $\omega_{11}^{(1)} = \frac{1}{1} = 100\%$ et la contribution due à $u_{2,t}$ est $\omega_{12}^{(1)} = \frac{0}{1} = 0\%$.
pour $h = 2$,

$$\begin{aligned} E\left(Y_{1,t+2} - E\left(Y_{1,t+2}/I_t\right)\right)^2 &= E\left(u_{1,t+2} + 0.95u_{1,t+1} - 0.433u_{2,t+1}\right)^2 \\ &= 2.0900 \end{aligned}$$

d'où la contribution due à $u_{1,t}$ est $\omega_{11}^{(2)} = \dfrac{1 + 0.95^2}{2.0900} = 91.029\%$ et la contribution due à $u_{2,t}$ est $\omega_{12}^{(2)} = \dfrac{0.433^2}{2.0900} = 8.97080\%$.
pour $h = 3$,

$$\begin{aligned} E\left(Y_{1,t+3} - E\left(Y_{1,t+3}/I_t\right)\right)^2 &= E\left(u_{1,t+3} + 0.95u_{1,t+2} - 0.433u_{2,t+2} + 0.765u_{1,t+1} - 0.6495u_{2,t+1}\right)^2 \\ &= 3.0971 \end{aligned}$$

d'où la contribution due à $u_{1,t}$ est $\omega_{11}^{(3)} = \dfrac{1 + 0.95^2 + 0.765^2}{3.0971} = 80.324\%$ et la contribution due à $u_{2,t}$ est $\omega_{12}^{(3)} = \dfrac{0.433^2 + 0.6495^2}{3.0971} = 19.675\%$.
pour $h = 4$,

$$E\left(Y_{1,t+4} - E\left(Y_{1,t+4}/I_t\right)\right)^2$$
$$= E\left(u_{1,t+4} + 0.95u_{1,t+3} - 0.433u_{2,t+3} + 0.765u_{1,t+2} - 0.6495u_{2,t+2} + 0.5205u_{1,t+1} - 0.68847u_{2,t+1}\right)^2$$
$$= 3.842$$

d'où la contribution due à $u_{1,t}$ est $\omega_{11}^{(4)} = \dfrac{1 + 0.95^2 + 0.765^2 + 0.5205^2}{3.842} = 71.802\%$ et la contribution due à $u_{2,t}$ est $\omega_{12}^{(4)} = \dfrac{0.433^2 + 0.6495^2 + 0.68847^2}{3.842} = 28.197\%$.
A vous de faire la même chose pour $Y_{2,t}$.