4. Formes quadratiques

4.1 Définition

Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel. On dit qu'une application $q : E \to \mathbb{k}$ est une forme quadratique sur E, s'il existe une forme bilinéaire symétrique f, telle que:

$$\forall x \in E : q(x) = f(x; x).$$

4.2 Propriétés

1) L'ensemble des formes quadratiques définies sur E, noté $Q(E)$, est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de E dans $\mathbb{k}$.

2) Le noyau de q est le noyau de f, et le rang de q est le rang de f.

3) Si q est une forme quadratique définie sur E, alors $q(0_E) = 0$.

4) L'application $S_2(E, K) \to Q(E)$ définie par $f \to q$, où q est forme quadratique associée à f, est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

5) Soit q une forme quadratique définie sur E, associée à une forme bilinéaire symétrique f de matrice A dans une base B de E. Alors, pour tout $x \in E$ de matrice X dans B, on a

$$q(X) =^t X.A.X =^t X.A^t.X$$

4.3 Forme Polaire

Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel et q une forme quadratique sur E. Alors il existe une forme bilinéaire symétrique unique f sur E, telle que:

$$\forall x \in E : q(x) = f(x; x).$$

Dans ce cas, f s'appelle la forme polaire associée à la forme quadratique q et on a la relation suivante :

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ f(x; y) = \frac{1}{2}[q(x, y) - q(x) - q(y)]$$

Preuve

q est une forme quadratique sur E, donc, par définition, il existe une forme bilinéaire g sur E, telle que

$$\forall x \in E;\ q(x) = g(x; x)$$

Soit $f : E \times E \to \mathbb{k}$ l'application définie par :

$$\forall (x; y) \in E;\ f(x; y) = \frac{g(x; y) + g(y; x)}{2}$$

Alors f est une forme bilinéaire symétrique sur E et on a

$$\forall x \in E;\ f(x; x) = \frac{g(x; x) + g(x; x)}{2} = g(x; x) = q(x)$$

Puisque f est symétrique, alors

$$\begin{aligned} \forall (x;y) &\in E\times E;\ q(x+y)=f(x+y;x+y)=f(x;x)+2f(x;y)+f(y;y) \\ &= q(x)+2f(x;y)+q(y) \end{aligned}$$

donc

$$\forall (x;y)\in E\times E; f(x;y)=\frac{1}{2}[q(x,y)-q(x)-q(y)]$$

Cette relation entre q et f assure l'unicité de f.

Remarques:

Soient E un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie $=n$, q une forme quadratique sur E et f la forme polaire associée à q.

1) Soit B une base de E et soit $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de f par rapport à la base B. Alors A s'appelle aussi la matrice de q par rapport à B et on a

$$\forall x\in E;\ q(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\leq i\prec i\leq n}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

2. Puisque f est symétrique, alors f possède au moins une base orthogonale B. B s'appelle aussi une base q-orthogonale et q s'écrit, par rapport à cette base, sous la forme réduite suivante :

$$\forall x\in E;\ q(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2$$

Théorème 4.1

Soient E un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie n, et q une forme quadratique sur E, de rang r. Alors il existe des formes linéaires l_1, l_2, , , , l_r, linéairement indépendantes et il existe des scalaires λ_1, λ_2, , , , , λ_r, non nuls, tels que:

$$\forall x\in E;\ q(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_il_i(x)^2$$

Preuve

Fixons une base $(e_1$,e_2, , , , ,$e_n)$ de E, alors pour chaque $x\in E$, avec $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$.On a

$$\forall x\in E,\ q(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\leq i\prec i\leq n}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

On sait que q possède au moins une base q-orthogonale $(v_1, v_2, , , , , v_n)$. Soit A la matrice de q par rapport à cette base, donc A est une matrice diagonale de rang r, par suite le nombre des coefficients diagonaux non nuls est égal à r. Donc quitte à réordonner les vecteurs de la base $(v_1,v_2, , , , ,v_n)$, on peut supposer que: $\forall i\in\{1,2,...,r\}$, $a_{ii}\neq 0$

Donc pour chaque $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^{n} X_i v_i$, on a:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i^2 \text{ où } \forall i \in \{1,2,...,r\},\ \lambda_i = a_{ii}$$

Soit $P = (p_{ij})_{1 \prec i,j, \prec n}$ la matrice de passage de la base $(v_1,v_2, , , , ,v_n)$ à la base $(e_1,e_2, , , , ,e_n)$, alors on sait que:

$$\forall i \in \{1,2,...,n\},\ X = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j$$

Soit $B^* =(e_1^*,e_2^*, , , , ,e_n^*)$ la base duale de $B = (e_1,e_2, , , , ,e_n)$, alors, par définition, on a

$$\forall j \in \{1,2,...,n\}, x = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(x)$$

Donc si pour chaque $\forall i \in \{1,2,...,n\}$, on pose $l_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} e_j^*$, alors $(l_1; l_2, , , , l_n)$ est une base de E^*, car $det_{B^*}\ (l_1; l_2, , , , l_n) \neq 0$, donc $(l_1; l_2, , , , l_r)$ est libre et on a

$$\forall i \in \{1,2,...,r\},\ X_i = l_i(x)$$

4.4 Méthode de Gauss pour la réduction d'une forme quadratique

Cas de dimension deux

Soient E un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension 2, (e_1, e_2) une base de E et q une forme quadratique sur E, alors pour chaque $x \in E$, avec $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$, on a:

$$q(x) = a x_1^2 + b x_2^2 + 2c x_1 x_2$$

i) Si $(a; b) \neq (0, 0)$, alors on peut supposer, par exemple, que $a \neq 0$, puis on procède de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
q(x) &= a x_1^2 + b x_2^2 + 2c x_1 x_2 \\
q(x) &= a(x_1^2 + \frac{2c}{a} x_1 x_2) + b x_2^2 \\
q(x) &= a(x_1 + \frac{c}{a} x_2)^2 - \frac{c^2}{a^2} x_2^2 + b x_2^2 \\
q(x) &= a(x_1 + \frac{c}{a} x_2)^2 + (b - \frac{c^2}{a^2}) x_2^2
\end{aligned}$$

Donc, si on pose: $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b - \frac{c^2}{a^2}$, $l_1(x) = x_1 + \frac{c}{a} x_2$, $l_2(x) = x_2$, alors on aura:

$$q(x) = \lambda_1 l_1(x)^2 + \lambda_2 l_2(x)^2$$

Donc, dans ce cas, une base q-orthogonale $(v_1; v_2)$ a pour matrice de passage par rapport à la base $(e_1; e_2)$, la matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $v_1 = e_1$ et $v_2 = -\frac{c}{a} e_1 + e_2$.

ii) Si $a = 0$ et $b = 0$, alors q s'écrit sous la forme :

$$q(x) = 2cx_1x_2 = \frac{c}{2}(x_1 + x_2)^2 - \frac{c}{2}(x_1 - x_2)^2$$

car $\forall a \in \mathbb{k}$, $\forall b \in \mathbb{k}$; $ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]$

Donc, si on pose: $\lambda_1 = \frac{c}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{c}{2}$, $l_1(x) = x_1 + x_2$, $l_2(x) = x_1 - x_2$ alors on aura:

$$q(x) = \lambda_1 l_1(x)^2 + \lambda_2 l_2(x)^2$$

Donc, dans ce cas, une base q-orthogonale $(v_1; v_2)$ a pour matrice de passage par rapport à la base $(e_1; e_2)$, la matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $v_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$, $v_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$.

<u>Cas de dimension 3:</u>

Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E et q une forme quadratique sur E, alors pour chaque $x \in E$, avec $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_2e_2$, on a:

$$q(x) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_1x_3 + 2fx_2x_3$$

i) Si $(a; b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors on peut supposer, on peut supposer par exemple, que $a \neq 0$, Dans ce cas, en regroupant tous les termes contenant x_1, on aura:

$$\begin{aligned}
q(x) &= (ax_1^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_1x_3) + bx_2^2 + cx_3^2 + 2fx_2x_3 \\
q(x) &= a(x_1^2 + 2(\frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3)x_1) + bx_2^2 + cx_3^2 + 2fx_2x_3 \\
q(x) &= a[(x_1 + \frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3)^2 - (\frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3)^2] + bx_2^2 + cx_3^2 + 2fx_2x_3 \\
&= a[(x_1 + \frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_3)^2 + Q(x_2, x_3)
\end{aligned}$$

où Q est une forme quadratique en (x_2, x_3). Donc pour achever la décomposition de q, il suffit de décomposer Q qui peut-être considérée comme une forme quadratique sur un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension 2.

ii) Si $a = b = c = 0$, alors q s'écrit sous la forme :

$$q(x) = \alpha x_1x_2 + \beta x_1x_3 + \gamma x_2x_3 \qquad \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$$

En supposant, par exemple, que $\alpha = 0$, on peut procèder de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
q(x) &= \alpha(x_1x_2 + \frac{\beta}{\alpha}x_1x_3 + \frac{\gamma}{\alpha}x_2x_3) \\
&= \alpha[(x_1 + \frac{\gamma}{\alpha}x_3)(x_2 + \frac{\beta}{\alpha}x_3)]\text{-}\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}x_3^2 \\
&= \alpha[(x_1 + \frac{\gamma}{\alpha}x_3)(x_2 + \frac{\beta}{\alpha}x_3)]\text{-}\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}x_3^2 \\
&= \alpha[\frac{1}{4}((x_1 + \frac{\gamma}{\alpha}x_3) + (x_2 + \frac{\beta}{\alpha}x_3))^2 - \frac{1}{4}((x_1 + \frac{\gamma}{\alpha}x_3) - (x_2 + \frac{\beta}{\alpha}x_3))^2]\text{-}\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}x_3^2 \\
&= \frac{\alpha}{4}(x_1 + x_2 + \frac{\gamma+\beta}{\alpha}x_3)^2 - \frac{\alpha}{4}(x_1 - x_2 + \frac{\gamma-\beta}{\alpha}x_3)^2\text{-}\frac{\beta\gamma}{\alpha}x_3^2 \\
&= a_1X_1^2 + a_2X_2^2 + a_3X_{31}^2
\end{aligned}$$

$$\text{avec} \quad \left\{\begin{array}{c} a_1 = \frac{\alpha}{4} \\ a_2 = -\frac{\alpha}{4} \\ a_3 = \text{-}\frac{\beta\gamma}{\alpha} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{c} X_1 = x_1 + x_2 + \frac{\gamma+\beta}{\alpha}x_3 \\ X_2 = x_1 - x_2 + \frac{\gamma-\beta}{\alpha}x_3 \\ X_3 = x_3 \end{array}\right.$$

Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{\gamma+\beta}{\alpha} \\ 1 & -1 & \frac{\gamma-\beta}{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors, une une base q-orthogonale (v_1, v_2, v_3) est définie par sa matrice de passage Q de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (v_1, v_2, v_3), où $Q = P^{-1}$.

Le cas général

Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension fine n, $((e_1, e_2, \quad, e_3)$ une base de E et $q : E \to \mathbb{k}$ une forme quadratique non nulle. Alors on sait que q s'écrit sous la forme :

$$\forall x \in E,\ q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i^2 + 2\sum_{1 \leq i \prec i \leq n}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Nous allons procéder par récurrence sur n, en distinguant deux cas :

i) Il existe $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$, tel que $a_{i_0} \neq 0$, on peut supposer que $a_1 \neq 0$. Dans ce cas, en regroupant tous les termes contenant x_1, (si à la place de a_1 on prend

a_{i_0} , on doit regrouper tous les termes contenant x_{i_0}), on aura,

$$
\begin{aligned}
q(x) &= a_1x_1^2+2\sum_{i=2}^{n}a_{1j}x_1x_j+\sum_{i=2}^{n}a_ix_i^2+2\sum_{2\leq i\prec i\leq n}a_{ij}x_ix_j\\
&= a_1[x_1^2+2(\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_1}x_j)x_1]+\sum_{i=2}^{n}a_ix_i^2+2\sum_{2\leq i\prec i\leq n}a_{ij}x_ix_j\\
&= a_1[(x_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_1}x_j)^2-(\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_1}x_j)^2]+\sum_{i=2}^{n}a_ix_i^2+2\sum_{2\leq i\prec i\leq n}a_{ij}x_ix_j\\
&= a_1(x_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_1}x_j)^2+Q(x_2,...,x_n)
\end{aligned}
$$

où

$$Q(x_2,...,x_n)=\sum_{i=2}^{n}a_ix_i^2+2\sum_{2\leq i\prec i\leq n}a_{ij}x_ix_j-(\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_1}x_j)^2$$

est une forme quadratque en $x_2,...,x_n$, donc on peut considérer Q comme une forme quadratique sur un $\Bbbk$-espace vectoriel de dmension $n-1$ et on applique, alors, l'hypothèse de récurrence à Q.