SEM Y

TD 3: Approximation des EDP de type elliptiques

1 Soit $a \in \mathbb{R}$. On s'intéresse au problème elliptique suivant

$$\begin{cases} -u_{xx}(x) + 2u(x) = x, \quad x \in (0,1) \\ u(0) = 0, \ u_x(1) = a. \end{cases} \tag{1}$$

— Écrire une discrétisation par différences finies du problème (1) pour un maillage uniforme $0 = x_0 < \cdots < x_n = 1$ de pas $h = (x_{i+1} - x_i) > 0$.
— Écrire le système linéaire obtenu sous la forme $AU = b$, où $U = (u_1, \cdots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et montrer qu'il admet une solution unique U.
— Montrer que si $a \geq 0$ alors $U \geq 0$.
— On prend $a = 0$. Calculer à la main une solution approchée en prenant les noeuds: $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$. Proposer une valeur approchée de $u(1)$.

2 *(Équation du transport non conservative)*
Soient $v \in C([0,1], \mathbb{R}_+)$ et $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. On considère l'équation du transport suivante qui modélise l'écoulement de fluides compressibles polyphasiques:

$$\begin{cases} -u''(x) + v(x)u'(x) = 0, \quad x \in (0,1), \\ u(0) = a_0, \ u(1) = a_1. \end{cases} \tag{2}$$

On cherche à approcher la solution du problème (2) par une méthode de différences finies. On se donne un maillage de pas $h = \frac{1}{n+1}$ uniforme, des inconnues discrètes $u_1, ..., u_n$ censées approcher les valeurs $u(x_1), ..., u(x_n)$. On considère le schéma aux différences finies suivant:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h^2}(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) + \frac{1}{h}v_i(u_i - u_{i-1}) = 0, \quad i = 1, ..., n, \\ &u_0 = a_0, u_{n+1} = a_1, \end{aligned} \tag{3}$$

où $v_i = v(x_i)$ pour $i = 1, ..., n$.
— Montrer que le système (3) s'écrit sous la forme matricielle $MU = b$ avec $U = (u_1, ..., u_n)$, $b \in \mathbb{R}^n$.
— Montrer que M est une matrice monotone. En déduire que M est inversible.
— *(Principe du maximum discret)*
— Montrer que si U est solution de $MU = b$ alors $\min(a_0, a_1) \leq u_i \leq \max(a_0, a_1)$, où $U = (u_1, \cdots, u_n)$.
Application: On prend $a_0 = a_1 = 1$ et $v \equiv 1$. Calculer une solution approchée aux noeuds $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$.