



Professeur TOUMI Salah

LES ANTENNES

CHAPITRE I : POTENTIEL VECTEUR, POTENTIEL SCALAIRE, CONDITION DE LORENTZ

I- Définition de A et V, Equation de propagation, Condition de Lorentz

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \quad \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\delta \vec{D}}{\delta t}$$

$$\vec{\text{div}} \vec{D} = \rho \quad \vec{\text{div}} \vec{B} = 0$$

$$\text{On pose : } \vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \quad \{ \vec{\text{div}} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = 0 \}$$

On appelle A : Potentiel vecteur

$$\frac{\delta \vec{B}}{\delta t} = \frac{\delta \vec{\text{rot}} \vec{A}}{\delta t} = \vec{\text{rot}} (\frac{\delta \vec{A}}{\delta t})$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} = 0 \rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E} + \vec{\text{rot}} (\frac{\delta \vec{A}}{\delta t}) = 0 \rightarrow \vec{\text{rot}} (\vec{E} + \frac{\delta \vec{A}}{\delta t}) = 0$$

On sait que : $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}) = 0$

$$\vec{E} + \frac{\delta \vec{A}}{\delta t} = - \vec{\text{grad}} \vec{V}$$

On appelle V : Potentiel scalaire.

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \quad \mu \cdot \vec{H} : \vec{\text{rot}} \vec{A} \rightarrow \vec{H} = 1/\mu \cdot \vec{\text{rot}} \vec{A}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = 1/\mu \cdot \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = 1/\mu \cdot \{ \vec{\text{grad}}(\vec{\text{div}} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \}$$

$$= \vec{J} + \frac{\delta \vec{D}}{\delta t} = \vec{J} + \epsilon \cdot \frac{\delta \vec{E}}{\delta t}$$

$$\vec{\text{grad}}(\vec{\text{div}} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu \cdot \vec{J} + \epsilon \cdot \mu \cdot \frac{\delta \vec{E}}{\delta t}$$

$$\vec{E} + \frac{\delta \vec{A}}{\delta t} = - \vec{\text{grad}} \vec{V} \rightarrow \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} = - \vec{\text{grad}} \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} - \frac{\delta^2 \vec{A}}{\delta t^2}$$

$$\vec{\text{grad}}(\vec{\text{div}} \vec{A}) - \Delta \vec{A} - \mu \cdot \vec{J} + \epsilon \cdot \mu \cdot \{ \vec{\text{grad}} \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} + \frac{\delta^2 \vec{A}}{\delta t^2} \} = 0$$

$$\vec{\text{grad}} \{ \vec{\text{div}} \vec{A} + \epsilon \cdot \mu \cdot \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} \} - \Delta \vec{A} - \mu \cdot \vec{J} + \epsilon \cdot \mu \cdot \frac{\delta^2 \vec{A}}{\delta t^2} = 0$$

Je peux alors poser : **$\vec{B} = \vec{\text{rot}} (\vec{A} + \vec{\text{grad}} \vec{f})$** du moment que : $\vec{f} = \vec{\text{div}} \vec{A} + \epsilon \cdot \mu \cdot \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} = 0$

C'est la condition de Lorentz.

$$\vec{\Delta A} + \mu \cdot \vec{J} - \epsilon \cdot \mu \cdot \delta^2 \vec{A} / \delta t^2 = \vec{0} : \quad \text{est l'équation de propagation du vecteur potentiel } \vec{A}.$$

$\vec{E}$, $\vec{H}$ et $\vec{A}$ se propagent suivant une loi identique.

La vitesse de propagation est $v_\phi = 1/\sqrt{\epsilon \cdot \mu}$

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \delta \vec{A} / \delta t$$

$$\text{Nous avons : } \text{div } \vec{D} = \rho \quad \rightarrow \quad \text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon$$

$$\text{div } \vec{E} = -\text{div}(\text{grad } V) - \text{div}(\delta \vec{A} / \delta t)$$

$$\rho / \epsilon = -\Delta V - \text{div}(\delta \vec{A} / \delta t)$$

de la condition de Lorentz :

$$\text{div } \vec{A} + \epsilon \cdot \mu \cdot \delta V / \delta t = 0 \quad \rightarrow \quad \text{div}(\delta \vec{A} / \delta t) = -\epsilon \cdot \mu \cdot \delta^2 V / \delta t^2$$

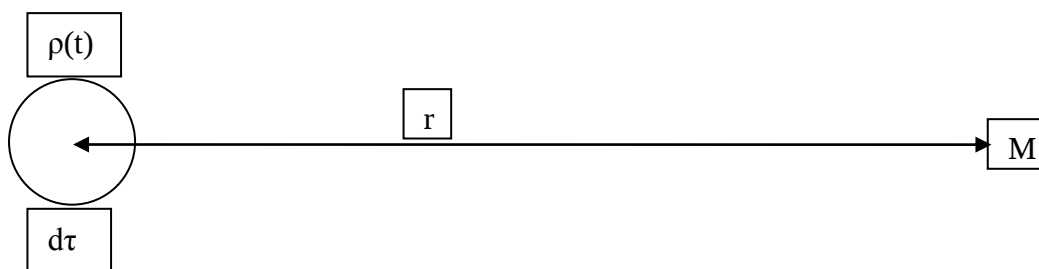
$$\Delta V + \rho / \epsilon - \epsilon \cdot \mu \cdot \delta^2 V / \delta t^2 = 0 : \quad \text{est l'équation de propagation du potentiel scalaire } V.$$

La vitesse de propagation est $v_\phi = 1/\sqrt{\epsilon \cdot \mu}$ ou $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}$ dans le cas du vide.

On vient de montrer qu'à chaque fois qu'on a un champs vecteur $\vec{E}$ et $\vec{H}$, alors il existe $\vec{A}$ et $V \rightarrow$ si on peut trouver $\vec{A}$ et V alors on peut connaître $\vec{E}$ et $\vec{H}$.

II- Les potentiels retardés

On va essayer de déterminer V dans le cas le plus général. On considère un volume $d\tau$ et on se place à une distance r , dans $d\tau$, il existe une densité de charge $\rho(t)$.



On appelle V , le potentiel créé par la charge ρ dans le volume $d\tau$ au point M .

$$\Delta V - \epsilon \cdot \mu \cdot \delta^2 V / \delta t^2 + \rho(t) / \epsilon = 0$$

ΔV en coordonnées sphériques :

$$\Delta V = 2/r \cdot \delta V / \delta r + \delta^2 V / \delta r^2 = 1/r \cdot \delta^2 (rV) / \delta r^2$$

$$1/r \cdot \delta^2 (rV) / \delta r^2 - \epsilon \cdot \mu \cdot \delta^2 V / \delta t^2 + \rho(t) / \epsilon = 0$$

$$\rho(t) \text{ existe dans } d\tau \rightarrow \text{mais au point } M, \rho(t) = 0$$

$$1/r \cdot \delta^2 (rV) / \delta r^2 = 1/c^2 \cdot \delta^2 V / \delta t^2$$

r.V vérifie l'équation des cordes vibrantes.

$$r.V = f(t - r/c) + g(t + r/c)$$

L'onde réfléchie n'a aucune signification physique car on est dans le vide.

$$r.V = f(t - r/c) \rightarrow V = 1/r \cdot f(t - r/c).$$

La cause qui se produit en $d\tau$ a un effet retardé sur M.

$$\text{En électrostatique : } V_s = \rho(t) \cdot d\tau / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r \quad (\text{Poisson}).$$

$$\rho(t) \cdot d\tau / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r = 1/r \cdot f(t) \quad (r \rightarrow 0).$$

$$f(t) = \rho(t) \cdot d\tau / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \quad \text{toujours } r \rightarrow 0.$$

$$V = 1/r \cdot \rho(t - r/c) \cdot d\tau / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon$$

$\rho(t - r/c)$ est la charge qui existait à l'instant antérieur au point 0.

Ce qui se passe en 0 est retardé par rapport à ce qui se passe en M.

$$V = 1 / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \iiint \rho(t - r/c) \cdot d\tau / r$$

V est un potentiel retardé $\rightarrow$ ce qui se passe en M est dû à ce qui se passe en 0 à l'instant $t - r/c$.

$\rightarrow$
A et V n'ont pas de signification physique, ils ne représentent que des artifices de calculs pour trouver E et $\rightarrow$
H.

$$V = 1 / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \iiint \rho(t - r/c) \cdot d\tau / r$$

Dans le cas où on a un domaine surfacique de charge σ :

$$V = 1 / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \iiint_{\text{vol.}} \rho(t - r/c) \cdot d\tau / r + 1 / 4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \iint_{\text{surf.}} \sigma(t - r/c) \cdot d\tau / r$$

$$\rightarrow$$
$$A = \mu / 4 \cdot \pi \cdot \iiint_{\text{vol.}} J(t - r/c) \cdot d\tau / r$$

$\iiint_{\text{vol}}$ est l'intégrale triple sur le volume.

$\iint_{\text{surf.}}$ Est l'intégrale double sur la surface.

Equations fondamentales de base de la théorie des antennes :

$$\vec{E} = - \text{grad } V - \delta \vec{A} / \delta t$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} / \mu$$

$$\Delta V - \epsilon \cdot \mu \cdot \delta^2 V / \delta t^2 + \rho / \epsilon = 0$$

$$\vec{\text{div}} \vec{A} + \epsilon \cdot \mu \cdot \delta V / \delta t = 0$$

$$\vec{\Delta} \vec{A} + \mu \cdot \vec{J} - \epsilon \cdot \mu \cdot \delta^2 \vec{A} / \delta t^2 = 0.$$